



# Commande optimale en Optique Adaptative Classique et Multiconjuguée

Brice Le Roux

## ► To cite this version:

| Brice Le Roux. Commande optimale en Optique Adaptative Classique et Multiconjuguée.  
| Automatique / Robotique. Université Nice Sophia Antipolis, 2003. Français. <tel-00004690>

**HAL Id: tel-00004690**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004690>**

Submitted on 16 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS  
UFR SCIENCES**

**ECOLE DOCTORALE  
SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES**

**THÈSE**

**Présentée**

**Pour obtenir le titre de**

**DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS**

**Spécialité : Sciences de l'Univers**

**PAR**

**Brice LE ROUX**

**COMMANDE OPTIMALE EN  
OPTIQUE ADAPTATIVE CLASSIQUE ET MULTICONJUGUÉE**

**Soutenue publiquement le 15 octobre 2003 devant le jury composé de :**

<b>M. Hisham ABOU-KANDIL</b>	Président du jury, rapporteur
<b>M. Julien BORGNINO</b>	Directeur de thèse
<b>M. Jean-Marc CONAN</b>	Co-directeur de thèse
<b>M. Roberto RAGAZZONI</b>	Rapporteur
<b>Mme Caroline KULCSÁR</b>	Examineur
<b>M. Norbert HUBIN</b>	Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Généralités : turbulence atmosphérique, optique adaptative et automatique</b>	<b>17</b>
1.1 La turbulence atmosphérique et ses effets . . . . .	17
1.1.1 Imagerie à travers la turbulence . . . . .	18
1.1.2 Caractéristiques de la turbulence atmosphérique . . . . .	18
1.1.2.1 Fluctuations de l'indice de réfraction . . . . .	18
1.1.2.2 Expression du paramètre de Fried dans le cas d'une turbulence Kolmogorov . . . . .	20
1.1.2.3 Répartition en altitude de la turbulence, hypothèse des couches discrètes . . . . .	20
1.1.2.4 Fluctuations de la phase turbulente . . . . .	20
1.1.3 Caractérisation spatiale dans la pupille sur une base modale . . . . .	22
1.1.3.1 Une base de modes discrète . . . . .	22
1.1.3.2 Caractéristiques spatiales de la turbulence sur les zernikes . . . . .	23
1.1.4 Caractérisation temporelle dans la pupille . . . . .	26
1.1.5 La turbulence volumique, le phénomène d'anisoplanétisme . . . . .	26
1.2 Optique Adaptative et Optique Adaptative Multiconjuguée . . . . .	29
1.2.1 Optique Adaptative classique . . . . .	29
1.2.1.1 Le miroir, la voie de correction . . . . .	29
1.2.1.1.1 Les différents types de miroirs : . . . . .	29
1.2.1.1.2 Propriétés : . . . . .	31
1.2.1.2 L'analyse de surface d'onde . . . . .	32
1.2.1.2.1 Le Shack-Hartmann : . . . . .	32
1.2.1.2.2 L'analyseur à pyramide : . . . . .	35
1.2.1.2.3 L'analyseur à courbure : . . . . .	37
1.2.1.3 L'étoile laser . . . . .	37
1.2.1.4 Boucle ouverte ou fermée, système statique ou dynamique . . . . .	37
1.2.1.4.1 Boucle ouverte ou fermée : . . . . .	37
1.2.1.4.2 Boucle fermée dynamique : . . . . .	37
1.2.1.4.3 Boucle ouverte dynamique . . . . .	40
1.2.1.4.4 Boucle ouverte statique . . . . .	40
1.2.1.5 L'anisoplanétisme en sortie d'un système d'OA classique . . . . .	40

1.2.2	Optique Adaptative Multiconjuguée . . . . .	41
1.2.3	Performances d'un système d'OA ou d'OAMC . . . . .	46
1.3	Estimation et commande en OA et OAMC . . . . .	46
1.3.1	Travaux précédents en commande en OA classique . . . . .	46
1.3.1.1	L'Intégrateur à Gain Modal Optimisé . . . . .	46
1.3.1.1.1	Simplification du critère par C. Dessenne : . . . . .	48
1.3.1.2	Le Prédicteur Modal Optimisé . . . . .	48
1.3.1.3	Estimation statique optimale en OA classique . . . . .	49
1.3.2	Estimation statique optimale en OAMC . . . . .	51
1.3.3	Modélisation d'état linéaire, filtrage de Kalman et commande . . . . .	54
1.3.3.1	Le formalisme d'état linéaire, les modèles d'état à temps discret et leurs propriétés . . . . .	54
1.3.3.1.1	Stabilité du système . . . . .	56
	Remarques . . . . .	56
1.3.3.1.2	Commandabilité du système . . . . .	57
1.3.3.1.3	Observabilité du système . . . . .	57
1.3.3.1.4	Dualité observation / commande . . . . .	58
1.3.3.1.5	Matrice de transfert . . . . .	58
1.3.3.2	L'estimation à variance minimale . . . . .	59
1.3.3.2.1	L'observateur, une technique standard d'estimation de paramètres : . . . . .	59
1.3.3.2.2	Le filtre de Kalman . . . . .	60
	Rappel de quelques propriétés . . . . .	60
	Obtention du filtre de Kalman . . . . .	61
	Le filtre asymptotique . . . . .	62
1.3.3.2.3	Synthèse sur l'estimation à variance minimale dans le formalisme d'état . . . . .	63
1.3.3.3	La commande . . . . .	63
1.3.3.3.1	Retour d'état et retour d'état reconstruit, techniques standards de la commande . . . . .	63
1.3.3.3.2	La commande à réponse pile . . . . .	64
	Meilleure correction avec un bloqueur d'ordre 0 : . . . . .	65
1.3.3.3.3	Les commandes LQ et LQG . . . . .	66
1.3.3.4	Le théorème de séparation . . . . .	66
<b>2</b>	<b>La commande optimale en OA Classique</b> . . . . .	<b>69</b>
2.1	Découplage des problèmes d'estimation et commande . . . . .	69
2.1.1	Un miroir à dynamique infinie . . . . .	70
2.1.2	Estimation et projection . . . . .	70
2.2	Description du système, connaissances <i>a priori</i> . . . . .	71
2.2.1	Description physique du système - équations de base . . . . .	72
2.2.2	Choix du modèle de turbulence, le modèle du premier ordre . . . . .	75
2.2.2.1	Un modèle AR1 . . . . .	75

2.2.2.2	La décorrélation temporelle d'un modèle AR1 . . . . .	75
2.2.2.3	Densité Spectrale de Puissance d'un modèle AR1 . . . . .	76
2.2.2.4	Conséquences sur l'erreur temporelle . . . . .	76
2.2.2.5	Le modèle AR1 choisi . . . . .	79
2.2.2.6	Ajustement du modèle AR1 sur une turbulence Taylor . . . . .	80
2.3	Choix du vecteur d'état, équations d'état . . . . .	80
2.3.1	Une première forme, généralisable à l'OAMC . . . . .	81
2.3.2	Une deuxième forme plus compacte mais limitée à l'OA classique . . . . .	82
2.4	Propriétés du modèle d'état . . . . .	83
2.4.1	Stabilité du système . . . . .	83
2.4.2	Commandabilité du système . . . . .	84
2.4.3	Observabilité du système . . . . .	84
2.5	Mise en œuvre du filtre de Kalman et de la commande. . . . .	85
2.5.1	Écriture du filtre de Kalman et de la commande . . . . .	85
2.5.2	Le filtre asymptotique . . . . .	86
2.5.3	Introduction d'autres paramètres dans le modèle - correction des aberrations statiques . . . . .	87
2.6	Bibliographie - comparaison aux travaux précédents . . . . .	89
2.6.1	L'intégrateur à gain modal optimisé . . . . .	89
2.6.2	Le prédictor modal optimisé . . . . .	89
2.6.3	Utilisation d'un formalisme d'état en OA . . . . .	91
2.6.4	Approche par moindres carrés récursifs avec oubli . . . . .	92
2.6.5	Estimation statique optimale . . . . .	93
2.7	Simulations numériques . . . . .	94
2.7.1	Conditions de simulation . . . . .	95
2.7.1.1	Les deux générateurs de turbulence atmosphérique . . . . .	95
2.7.1.2	Le système d'OA . . . . .	96
2.7.1.3	Mise en œuvre de l'IGMO . . . . .	96
2.7.1.4	Mise en œuvre du filtrage de Kalman . . . . .	99
2.7.1.5	Le calcul de performances . . . . .	99
2.7.1.6	Notion de vitesse de vent équivalente . . . . .	99
2.7.2	Résultats de simulation, comparaison entre filtrage de Kalman et IGMO . . .	101
2.7.2.1	Convergence temporelle et utilisation du filtre asymptotique. . . .	104
2.7.2.2	Vérification du comportement en fonction de la fréquence d'échan- tillonnage . . . . .	105
2.7.2.3	Robustesse aux erreurs de modèle de turbulence . . . . .	105
2.7.3	Un cas pseudo-OAMC . . . . .	107
2.8	Application à la XAO, prise en compte de divers paramètres . . . . .	111
2.8.1	Aliasing . . . . .	111
2.8.2	Vibrations du télescope . . . . .	112
2.9	Discussion sur la commande optimale en OA . . . . .	112

<b>3</b>	<b>Commande optimale en Optique Adaptative Multiconjuguée</b>	<b>115</b>
3.1	Budget d'erreur en OAMC . . . . .	115
3.2	Sensibilité aux variations de conditions de turbulence et aux erreurs de modèle . . . .	118
3.2.1	Conditions de simulation . . . . .	119
3.2.1.1	La turbulence . . . . .	119
3.2.1.2	Le système, la reconstruction optimale et tomographique . . . . .	120
3.2.1.3	Choix du nombre de Miroirs Déformables . . . . .	122
3.2.2	Influence de la variation du $C_n^2$ . . . . .	124
3.2.3	Les erreurs d'analyse . . . . .	126
3.2.4	Influence de la méconnaissance du profil de $C_n^2$ . . . . .	128
3.3	Le filtrage de Kalman pour l'OAMC . . . . .	130
3.3.1	Introduction, notations, présentation de l'article JOSAA . . . . .	130
3.3.2	Article soumis à JOSAA le 06/06/03. . . . .	131
<b>4</b>	<b>Validation expérimentale, la manip MCAO</b>	<b>167</b>
4.1	Objectifs d'une mise en œuvre expérimentale . . . . .	167
4.2	Le banc optique et ses éléments . . . . .	168
4.2.1	Présentation générale du banc . . . . .	168
4.2.2	Le générateur de turbulence . . . . .	170
4.2.3	La voie d'analyse . . . . .	174
4.2.3.1	Dimensionnement du SH . . . . .	174
4.2.3.2	Modèle d'ASO . . . . .	175
4.2.4	Le système de correction . . . . .	176
4.2.4.1	Le modèle miroir . . . . .	176
4.2.4.2	La dérive du miroir . . . . .	176
4.2.5	Injection des sources . . . . .	176
4.3	La démarche expérimentale . . . . .	178
4.3.1	La manip statique . . . . .	178
4.3.1.1	Calcul de la matrice d'interaction optique et validation des modèles du système . . . . .	179
4.3.1.2	La correction hors-axe . . . . .	179
4.3.2	La manip dynamique . . . . .	180
4.3.2.1	Considérations pratiques sur la mise en place d'un filtre de Kalman suivi d'un retour d'état . . . . .	181
4.4	Conclusion . . . . .	182
	<b>Conclusion</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Notions de dérivation matricielle</b>	<b>187</b>
<b>B</b>	<b>Compléments de calcul sur l'interprétation du prédicteur modal</b>	<b>189</b>
<b>C</b>	<b>De l'origine de la perte d'observabilité dans le modèle d'état choisi</b>	<b>191</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

7

**D Article de conférence ESO, Mai 2001**

**195**





# Table des figures

1.1	Image courte pose d'un point source à l'infini en l'absence de turbulence et avec turbulence . . . . .	19
1.2	Profils de $C_n^2$ mesurés à San Pedro-Martir dans un intervalle de temps de quatre heures durant la nuit du 16 au 17 mai 2000 par la méthode du Scidar Généralisé. . . . .	21
1.3	Polynômes de Zernike de 1 à 21 rangés en fonction de l'ordre radial (verticalement) et de l'ordre azimutal (horizontalement) . . . . .	24
1.4	Évolution de la variance de phase turbulente $\sigma_{tur,i}^2$ en fonction de l'ordre radial . . . .	25
1.5	DSP turbulentes pour le tilt et le polynôme de Zernike 21 [trait plein]. Les courbes théoriques sont représentées pour comparaison [tiret-point] . . . . .	27
1.6	Le phénomène d'anisoplanétisme . . . . .	28
1.7	Le système d'OA classique boucle fermée . . . . .	30
1.8	Fonction d'influence de l'actionneur numéro 40 du miroir SAM du Banc d'Optique Adaptative de l'ONERA . . . . .	32
1.9	Schéma de fonctionnement de l'analyseur de Shack-Hartmann . . . . .	33
1.10	Évolution des variances de bruit et de phase turbulente en fonction de la fréquence spatiale . . . . .	35
1.11	Représentation d'un analyseur à pyramide . . . . .	36
1.12	Schémas-blocs d'un système boucle ouverte et d'un système boucle fermée . . . . .	38
1.13	Évolution des variances d'erreur d'analyse, d'erreur temporelle, et de phase turbulente en fonction de l'ordre radial de polynôme de Zernike . . . . .	39
1.14	Images d'une étoile ponctuelle quand on s'éloigne de l'EG . . . . .	40
1.15	Schéma de principe des deux approches d'analyse du volume turbulent en OAMC, l'approche Layer Oriented et l'approche Star Oriented. . . . .	42
1.16	Simulation de champs d'étoiles corrigé en OA classique et en OA multiconjuguée. L'OAMC permet d'élargir le champ isoplanétique. . . . .	44
1.17	Illustration de la notion de mode mal vu. Les contributions des deux couches turbulentes se compensent dans les directions d'analyse, mais pas dans les autres. . . . .	45
1.18	Illustration d'une allure typique du critère, de $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$ en fonction du gain de l'intégrateur. . . . .	47
1.19	RS de l'estimateur optimal et de la TSVD pour différents seuils de troncature, dans le champ de vue. . . . .	53
2.1	Chronologie des événements dans les différents intervalles de temps . . . . .	72
2.2	Schéma bloc d'un système d'OA classique boucle fermée. . . . .	73

2.3	Autocorrélation temporelle du tilt pour une turbulence Taylor et pour un modèle AR1	77
2.4	Illustration qualitative de la forme des DSP de la turbulence de type Taylor et AR1	78
2.5	Evolution de la trace de $\mathbf{C}_{n+1/n}$ en fonction de $n$	87
2.6	Fonctions de transfert $ H $ et $ E $ pour un gain de 0.5	98
2.7	Valeurs des coefficients $a_i$ en fonction du mode de Zernike dans le modèle de turbulence choisi pour les simulations numériques.	100
2.8	Évolution du facteur $\rho$ en pourcentage en fonction du RSB et pour deux fréquences d'échantillonnage, 50 Hz [trait plein] et 100 Hz [tirets].	103
2.9	Phase résiduelle mode à mode, filtre de Kalman et IGMO, en OA classique	104
2.10	Différence entre les variances résiduelle Kalman optimal et asymptotique en fonction du temps	105
2.11	Variance de phase résiduelle en fonction du mode pour un filtre de Kalman à 300 Hz et 30 Hz	106
2.12	Représentation pour illustration des polynômes de Zernike numéros 4 et 17.	109
2.13	Variance de phase résiduelle avec modes mal vus, filtre de Kalman et IGMO	110
3.1	Schéma de principe de l'erreur de sous-modélisation généralisée. $\alpha$ est le champ d'intérêt.	117
3.2	Résidu de correction (en niveau de gris) en fonction de l'altitude et de la fréquence spatiale pour deux ou trois MD.	117
3.3	Résumé des différents termes d'erreur en OAMC.	119
3.4	Figure de gauche : Les profils de $C_n^2$ normalisés, $\sum_h C_n^2(h) = 1$ , en pointillés, et le profil moyen, en trait plein. Figure de droite : Le profil de $C_n^2$ moyen.	120
3.5	Evolution du $\theta_0$ (arcsec) en fonction du profil de $C_n^2$ .	121
3.6	Les trois EGs et la direction sur laquelle sont calculées les performances du système.	121
3.7	RS en fonction du champ pour 1, 2 et 7 MD, le cas classique est aussi représenté pour comparaison.	123
3.8	RS en fonction du champs pour la reconstruction MAP avec correction par sept miroirs. Les profils vrais sont utilisés comme modèle.	125
3.9	Les deux profils de $C_n^2$ qui donnent le meilleur RS (trait plein) et le moins bon RS (tirets).	125
3.10	RS dans le champs pour le cas à 3 étoiles guides et 7 MD. Figure de gauche : RSB= 10. Figure de droite : RSB= 100.	126
3.11	RS dans le champ pour le cas à 7 MD et RSB= 10. Figure de gauche : 4 EGs. Figure de droite : 13 EGs.	127
3.12	Les configurations à trois et treize EGs et la direction sur laquelle sont calculées les performances du système.	127
3.13	RS dans le champ pour le cas 7 MD, 13 EGs et RSB= 100.	128
3.14	RS dans le champ obtenus en utilisant le vrai profil de $C_n^2$ dans le modèle du MMSE et le profil moyen.	129
3.15	RS donné par un reconstituteur MMSE dont le modèle de profil de $C_n^2$ est un profil constant sur 7 couches	130

4.1	Schéma de principe de la correction hors-axe . . . . .	169
4.2	Schéma général du banc optique . . . . .	169
4.3	Caractérisation de l'écran de phase. . . . .	171
4.4	Cartes d'intensité dans la pupille pour différentes distances entre l'écran de phase et la pupille . . . . .	173
4.5	Courbes de taux de scintillation . . . . .	173
4.6	Géométrie de la pupille ASO . . . . .	176
4.7	Déformée du moteur numéro 40 en microns mesurée sur la pupille totale du miroir déformable pour une application de tension de 3V. . . . .	177
4.8	Module d'injection du banc conçu sous Zemax . . . . .	178



# Remerciements

Me voici déjà arrivé à la fin d'un cycle, un cycle de trois années de thèse. Selon le point de vue, cela peut paraître très long ou très court. De fait, cela m'a semblé parfois bien assez long, d'autres fois (vers la fin !) beaucoup trop court... Et puis quand tout se termine, quand le rideau tombe, on se retrouve avec le blues du comédien qui réalise tout d'un coup que la saison est terminée et qu'il faut changer de pièce. Simplement parce que l'on s'attache aux gens avec qui l'on travaille. Ces trois années représentent en fait une aventure humaine tout autant que scientifique. Alors, même si tous ces gens ne disparaissent pas, même si nous nous croiserons encore et encore à l'occasion de congrès, conférences ou séminaires, je tiens à tirer un coup de chapeau à tous ceux qui ont su me supporter (dans tous les sens du terme !). Et je commencerai par Jean-Marc, qui a tenu le rôle central de la pièce qui s'est jouée. Je n'aime pas aligner les qualificatifs, substantifs et autres adjectifs, mais je ferai là une exception. S'il y a bien une personne à qui je dois d'avoir mené à bien cette thèse, c'est bien toi. Merci pour ta gentillesse, merci pour ton calme et ta patience, merci pour ta capacité de compréhension, merci pour tes efforts, pour m'avoir soutenu jusqu'au bout... Il y a des gens brillant qui n'ont qu'une piètre compréhension de la psychologie et des gens, tu cumules toi les deux qualités. C'est suffisamment rare pour que cela mérite d'être noté. Et puis il y a bien sûr Julien Borgnino que je suis allé voir le plus régulièrement possible à Nice, d'où je revenais toujours avec de nouvelles idées, de nouveaux axes à étudier. Je le remercie pour avoir toujours été tellement disponible et avoir su me transmettre à chaque fois que je descendais sur Nice toute sa motivation pour l'optique atmosphérique.

Merci bien-sûr à tous ceux avec qui j'ai collaboré, travaillé, avec tant de plaisir et de bonheur sur les dures loies du monde de Kalman. Entre autres évidemment Henri-François et Caroline (qui, à l'heure où j'écris ces lignes relit une nouvelle fois mon mémoire dans son intégralité... elle est imbattable ! ), que je remercie pour leur patience, leur compétence, leur sens de la pédagogie... Et puis bien sûr le Laurent Mugnier, non seulement partenaire dans l'étude du retors Kalman mais aussi sur la fin partenaire de bureau ! alors un remerciement tout spécial pour Laurent qui m'a supporté au quotidien dans les mois de rédaction de la thèse... Laurent n'est pas le seul à avoir eu la chance de partager mon bureau : j'ai commencé ces trois ans avec Amandine, puis Dolo (qui a finalement préféré me fuir aux Canaries...), avant Rodolphe. A tous les trois également, pour votre patience, merci et bravo !...

Et puis, attention, roulement de tambour, on applaudit l'ami Sylvain, arrivé à peu de choses prêt en même temps que moi, parti un peu avant pour Garching. Comme tu le disais dans ton mémoire *On se reverra, c'est certain*. Travailler avec toi sur la manip a été un vrai plaisir. Partager notre amitié aussi.

Et puisqu'on en est à parler de cette manip, je trouve l'occasion de remercier tous ceux qui ont participé à sa mise en œuvre, depuis Francis Mendez et Bruno Fleury, grands ordonnateurs du banc

d'optique, jusqu'à Christophe Coudrain, grand gourou de la caméra...

Mais ces trois ans de thèse n'ont pas été seulement placés sous le signe du travail, les week-end ski-de-fond (avec Laurent, Jean-Marc, Frédéric), les pauses-déjeuners musicales (avec Marie-Thérèse au piano), les grands débats passionnés entre amateurs de D. Lynch ou encore les parties de belotte endiablées (avec Sylvain, Thierry et Laurent) ont contribué à faire de ces trois années autre chose que des années de labeur... De façon général, je souhaite remercier l'ensemble de l'équipe pour la bonne ambiance qui a régné au labo du DOTA Châtillon pendant ma thèse... ambiance à laquelle ne sont sans doute pas étrangers autant Vincent, Gérard que Marc, que je remercie également pour avoir su toujours prendre le temps qu'il fallait pour répondre à mes questions.

Merci également à tous les membres du jury, qui ont permis par leur relectures et leurs commentaires d'améliorer ce manuscrit.

Je ne finirai pas ces lignes sans une pensée douce pour ma compagne de cœur, Aurélie, dont la simple présence à mes côtés m'a tant aidé.

# Introduction

La résolution angulaire théorique d'un télescope, c'est à dire sa capacité à distinguer deux points lumineux séparés d'une certaine distance, dépend linéairement de son diamètre. Plus le diamètre est grand et meilleure est la résolution.

Mais au delà d'un certain diamètre, on se rend compte que la résolution effective d'un télescope qui regarde le ciel à travers l'atmosphère n'augmente plus avec le diamètre. Elle est limitée par la turbulence atmosphérique qui déforme le front d'onde et trouble l'image.

Plusieurs approches ont été proposées pour aller au delà de la résolution imposée par l'atmosphère. "L'interférométrie des tavelures", proposée par A. Labeyrie en 1970 [Lab70] est basée sur le principe de l'enregistrement de courtes poses qui figent la turbulence. Le traitement des images obtenues permet de retrouver la résolution limite du télescope. Mais si l'on veut augmenter le rapport signal à bruit, l'optique adaptative est sans aucun doute la technique la plus efficace puisqu'elle permet de retrouver à chaque instant et en temps réel la résolution du télescope et donc d'enregistrer des images longues poses. Dans cette approche, proposée dans les années cinquante [Bab53] et reprise dans les années soixante-dix [HLK77], un miroir déformable corrige en temps réel le front d'onde incident en utilisant les données provenant d'un instrument de mesure de la phase (analyseur de front d'onde) placé derrière le miroir et qui mesure donc le résidu non corrigé à chaque instant. L'analyseur fait sa mesure sur un objet de référence à l'infini (l'étoile guide).

Le premier système d'optique adaptative développé pour l'astronomie a vu le jour voilà un peu plus d'une dizaine d'années avec le système COME-ON sur un télescope de l'ESO à la Silla (Chili) [RFK<sup>+</sup>90] [RMB<sup>+</sup>92]. Depuis lors, les télescopes du monde entier s'équipent tous progressivement d'optique adaptative.

Mais sur une image issue d'une optique adaptative, si la résolution est retrouvée sur l'étoile guide, elle se dégrade dès qu'on s'en éloigne. Ce phénomène, connu sous le nom d'anisoplanétisme, a pour origine la nature volumique de la turbulence atmosphérique. Le champ dans lequel l'optique adaptative classique permet d'obtenir de bonnes performances est typiquement de quelques arcsecondes.

R. H. Dicke a introduit en 1975 [Dic75] le concept d'optique adaptative multiconjuguée pour corriger ce phénomène. Dans un tel système, plusieurs miroirs conjugués à différentes altitudes dans l'atmosphère permettent de corriger le volume de turbulence. La mesure est faite avec plusieurs analyseurs en utilisant l'information provenant de plusieurs étoiles guides. Cette idée a été reprise quelques années plus tard [Bec88], [TFV92], [Eil94], [RMV00], [FCMR02]. La faisabilité de l'OAMC a alors été montrée et un estimateur de la phase turbulente basé sur la minimisation de la variance de phase dans un champ d'intérêt a été proposé [FCR<sup>+</sup>01]. Cet estimateur utilise les *a priori* spatiaux (connaissances statistiques) mais il est adapté à un système boucle ouverte et sans considération temporelle.

L'objectif de cette thèse s'inscrit dans ce contexte. Il s'agit de développer une commande optimale



au sens du même critère que précédemment pour l'optique adaptative multiconjuguée (OAMC) et qui utilise autant les *a priori* spatiaux que les *a priori* temporels dans la gestion du système boucle fermée. L'introduction d'*a priori* spatiaux ne se fait pas naturellement dans le formalisme habituel en OA (le formalisme fréquentiel). La démarche présentée ici consiste à se placer dans un formalisme classique en automatique, le formalisme d'état, et à développer dans ce formalisme un filtre de Kalman comme estimateur de la phase turbulente suivi d'un retour d'état comme commande, en commençant par le cas de l'optique adaptative classique avant de passer à la multiconjugaison.

Au chapitre 1, les notions fondamentales touchant à la turbulence atmosphérique, l'optique adaptative et l'optique adaptative multiconjuguée sont tout d'abord rappelées. Sont rappelés également les principes des méthodes de commande proposées dans la littérature et appliquées pour certaines d'entre elles à des systèmes fonctionnant actuellement. Sont présentées également le formalisme d'état, le principe de l'estimation (et notamment le filtrage de Kalman) et celui de la commande dans ce formalisme.

L'élaboration d'un filtre et d'une commande adaptés passe par l'écriture d'un modèle d'état, qui décrit l'évolution du système par l'intermédiaire d'une variable représentant l'état du système et qu'on nomme vecteur d'état. Dans le chapitre 2.7.2, un modèle d'état à temps discret qui permet de décrire un système d'OA classique est établi et le vecteur d'état correspondant est donné. Pour décrire l'évolution temporelle de la phase turbulente, un modèle auto-régressif du premier ordre est utilisé et ses caractéristiques sont précisées. Il est expliqué pourquoi on peut négliger la dynamique du miroir et pourquoi cela permet de simplifier la commande. Une analyse des correspondances et des différences entre les approches antérieures et la nôtre est ensuite présentée. Une simulation numérique montre que le filtrage de Kalman proposé permet d'obtenir, déjà en optique adaptative classique, un gain significatif vis-à-vis de l'intégrateur modal optimisé.

Le chapitre 3 est dédié au cas de l'OAMC. Une étude de la robustesse de la performance de l'estimation optimale dans le cas statique boucle ouverte est tout d'abord présentée sous forme de simulations numériques. Il est montré que l'estimation de la phase turbulente est très robuste vis-à-vis de la méconnaissance du profil de  $C_n^2$  et, dans notre cas de simulation, assez sensible à la variabilité du profil de  $C_n^2$ . Il est montré également que cette sensibilité est due principalement à des erreurs d'analyse.

La seconde partie du chapitre 3 est consacré au cas dynamique. En s'appuyant sur un article soumis à JOSAA, le modèle d'état adapté au cas multiconjugué et le filtre de Kalman correspondant sont présentés. Une version de l'intégrateur modal optimisé généralisé au cas de l'OAMC est également proposée. Une mise en œuvre par simulations numériques montre alors que l'approche par filtre de Kalman permet d'obtenir des performances significativement meilleures que celle que l'on obtient avec l'intégrateur à gain modal optimisé généralisé à l'OAMC.

Dans le dernier chapitre, il est question de la préparation de la mise en œuvre expérimentale de ces travaux théoriques sur le banc d'optique adaptative BOA de l'ONERA. Il s'agit de valider la correction hors-axe par l'utilisation d'*a priori* spatiaux, dans le cas statique puis dynamique. Les objectifs de cette mise en œuvre expérimentale sont précisés, le dimensionnement du système et les calibrations effectuées sont présentées.

# Chapitre 1

## Généralités : turbulence atmosphérique, optique adaptative et automatique

L'objectif de ce chapitre est de présenter le cadre dans lequel s'inscrit ce mémoire et de rappeler les résultats nécessaires à la bonne compréhension des chapitres suivants. Nous présenterons tout d'abord la turbulence atmosphérique, ses caractéristiques spatiales et temporelles et ses effets sur l'imagerie (paragraphe 1.1). Puis nous introduirons le principe des systèmes d'Optique Adaptative et d'Optique Adaptative Multiconjuguée et nous présenterons leurs éléments constitutifs (paragraphe 1.2 et 1.2.2). Nous préciserons ensuite comment l'estimation de la phase turbulente et la commande du système sont effectués habituellement. Nous finirons le chapitre en présentant le formalisme que nous utiliserons par la suite, à savoir le formalisme d'état. Nous expliquerons les bases de l'estimation à variance minimale et de la commande dans ce formalisme au paragraphe 1.3.

### 1.1 La turbulence atmosphérique et ses effets

Le déplacement de masses d'air de densité différente dans l'atmosphère terrestre en font un milieu turbulent. Ces masses d'air se déplacent en tourbillons et leur énergie cinétique se dissipe par la scission successive de tourbillons en des tourbillons de plus petites tailles jusqu'à dissipation par viscosité. Les plus grands tourbillons peuvent atteindre plusieurs dizaines de mètre (on parle de "grande échelle") et les plus petits quelques millimètres (on parle d'"échelle interne"). C'est la théorie de la cascade d'énergie de Kolmogorov.

Ces tourbillons entraînent par brassage de l'air des fluctuations de température dans l'atmosphère, et donc des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air. De l'indice de réfraction dépend linéairement le chemin optique. Ceci entraîne donc des fluctuations de la phase d'une onde électromagnétique qui traverse l'atmosphère. L'image au foyer du télescope en est affectée sous la forme d'une perte de résolution. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter les effets de la turbulence atmosphérique sur l'imagerie en astronomie, puis nous détaillerons les caractéristiques des fluctuations de l'indice de réfraction, dont nous déduirons celles de la phase.

### 1.1.1 Imagerie à travers la turbulence

On définit la Fonction d'Étalement de Point [FEP] d'un système comme l'image dans le plan focal d'un point source à l'infini. Elle est donnée par la théorie de la diffraction et s'écrit comme le module carré de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe  $\Psi(\mathbf{r})$  sur la pupille du système :

$$FEP(\rho) = ||TF(\Psi(\mathbf{r})P(\mathbf{r}))||^2, \quad (1.1)$$

avec  $P$  la pupille. On la suppose pour l'instant invariante par translation

L'image d'un objet quelconque  $O$  est alors donnée par le produit de convolution

$$I(\rho) = FEP(\rho) * O. \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un télescope de diamètre  $D$ , la pupille  $P$  s'écrit

$$P(\mathbf{r}) = 1 \quad \text{si } |\mathbf{r}| \in [0, D/2] \quad \text{s'il n'y a pas d'occultation centrale}, \quad (1.3)$$

$$P(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{sinon}. \quad (1.4)$$

En l'absence de turbulence, on montre alors que la FEP d'un télescope est une fonction d'Airy, de largeur à mi-hauteur  $\frac{\lambda}{D}$ . Elle représente la résolution limite du télescope. Plus  $D$  est grand et plus la résolution est bonne. En général, un télescope comporte une occultation centrale de diamètre  $d$ , et  $P$  devient :

$$P(\mathbf{r}) = 1 \quad \text{si } |\mathbf{r}| \in [d/2, D/2], \quad (1.5)$$

$$P(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{sinon}. \quad (1.6)$$

La FEP est légèrement modifiée par l'occultation centrale, mais on peut considérer quand  $d$  est petit devant  $D$  que la largeur à mi-hauteur reste égale à  $\frac{\lambda}{D}$ .

En présence de turbulence, le front d'onde traverse l'atmosphère et subit des retards ou avances de phases proportionnels au chemin optique traversé et donc à l'indice de réfraction. Le front d'onde qui arrive sur la pupille n'est plus plan. Si  $D$  est suffisamment grand par rapport aux tailles caractéristiques des défauts turbulents, on observe alors en courte pose dans le plan image du télescope une structure de tavelures ("speckles") qui est globalement plus large que la tache d'Airy [RGL82]. En longue pose, cette structure se moyenne en une gaussienne de largeur à mi-hauteur qui peut s'écrire sous la forme  $\frac{\lambda}{r_0}$ . On appelle  $r_0$  le paramètre de Fried [Fri66] et on le définit comme le diamètre du télescope équivalent qui a en l'absence de turbulence la même limite de résolution que celle introduite par la turbulence.

On présente en figure 1.1 une illustration de l'image courte pose au plan focal du télescope d'un point source à l'infini en l'absence de turbulence et avec turbulence. On voit que le paramètre qui règle alors la résolution du système est le paramètre  $r_0$ . Bien sûr, si  $D < r_0$ , la résolution du système est à nouveau donnée par  $D$ .

### 1.1.2 Caractéristiques de la turbulence atmosphérique

#### 1.1.2.1 Fluctuations de l'indice de réfraction

On peut caractériser les fluctuations spatiales de l'indice de réfraction par leur fonction de structure. On la définit comme la variance de la différence des fluctuations d'indice entre deux points distants de  $\rho$ .

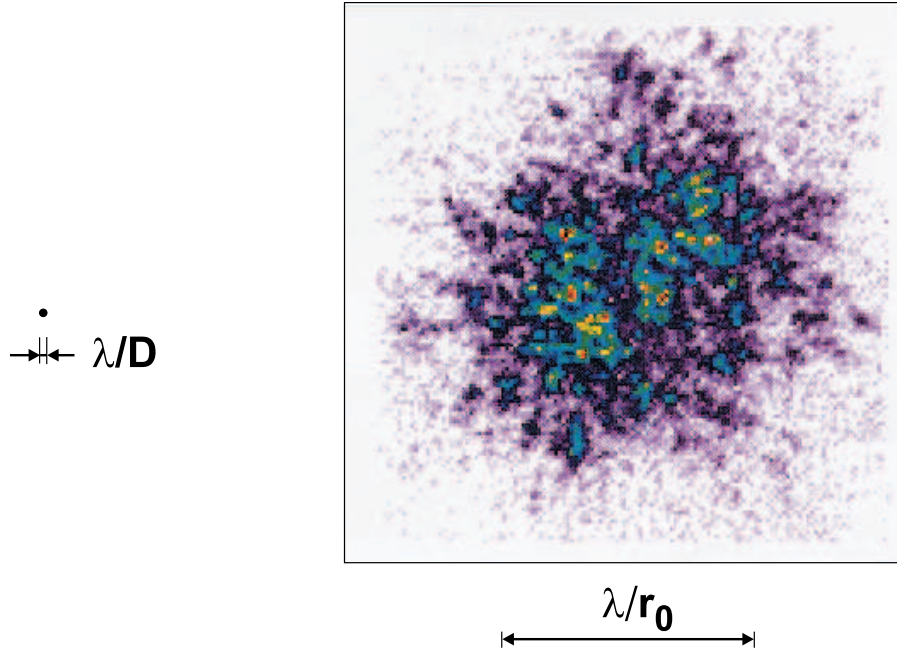


FIG. 1.1 – Image courte pose d'un point source à l'infini en l'absence de turbulence et avec turbulence

Si on note  $\Delta_n(\mathbf{r}, h)$  les fluctuations d'indice de réfraction sur une couche à l'altitude  $h$  et d'épaisseur  $\delta h$  et si on suppose  $\Delta_n(\mathbf{r}, h)$  stationnaire entre  $h$  et  $\delta h$ , alors la fonction de structure de l'indice de réfraction s'écrit pour la même couche :

$$D_{\Delta_n}(\rho, h) = \langle (\Delta_n(\mathbf{r}, h) + \Delta_n(\mathbf{r} + \rho, h))^2 \rangle \quad (1.7)$$

où  $\langle . \rangle$  est une moyenne d'ensemble. On peut montrer [Obu49], [Cor51] que, pour  $\rho$  compris entre la petite échelle  $l_0$  et la grande échelle  $L_0$ ,  $D_{\Delta_n}(\rho, h)$  peut s'écrire

$$D_{\Delta_n}(\rho, h) = C_n^2(h) \rho^{2/3}, \quad (1.8)$$

où  $\rho$  est la norme du vecteur  $\rho$ . Pour  $h$  donné,  $C_n^2(h)$  est une constante dite "constante de structure de l'indice de réfraction". Elle caractérise la force de la turbulence à l'altitude  $h$ .

Dans l'espace de Fourier, la caractérisation des fluctuations d'indice est donnée par leur Densité Spectrale de Puissance, qui n'est autre que la TF de  $D_{\Delta_n}(\rho, h)$ . A partir de (1.8) on obtient le spectre dit de Kolmogorov :

$$W_{\Delta_n, h}^{Kolmogorov}(\mathbf{f}) = 0.033(2\pi)^{-2/3} C_n^2(h) f^{-11/3}, \quad (1.9)$$

avec  $f$  le module de la fréquence spatiale  $\mathbf{f}$  et pour  $f \in [1/L_0, 1/l_0]$  [Tat61].

L'extrapolation de cette formule à l'ensemble du spectre des fréquences n'est pas physique, car elle implique une énergie globale de la turbulence infinie. Von Karman a proposé un spectre pour tout  $f$  :

$$W_{\Delta_n, h}^{VonKarman}(\mathbf{f}) = 0.033(2\pi)^{-2/3} C_n^2(h) \left( \frac{1}{L_0^2} + f^2 \right)^{-11/6} \exp(-f l_0)^2. \quad (1.10)$$

Ce spectre est à énergie finie et on peut noter qu'on retrouve le spectre de Kolmogorov à partir du spectre de Von Karman pour la gamme des fréquences supérieures à  $\frac{1}{L_0}$  et inférieure à  $\frac{1}{l_0}$ .

### 1.1.2.2 Expression du paramètre de Fried dans le cas d'une turbulence Kolmogorov

On a déjà introduit le paramètre de Fried  $r_0$  et on a dit qu'il caractérisait la résolution imposée par la turbulence. Il est un paramètre global de caractérisation de la turbulence atmosphérique.

On peut montrer [Fri66] que, si on considère une statistique de Kolmogorov et on a une plane traversant les différentes couches de la turbulence pour une direction donnée, alors

$$r_0 = \left( 0.42 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos\gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right)^{-3/5}, \quad (1.11)$$

avec  $\gamma$  l'angle zénithal et  $\lambda$  la longueur d'onde d'observation.

### 1.1.2.3 Répartition en altitude de la turbulence, hypothèse des couches discrètes

La constante de structure de l'indice de réfraction  $C_n^2(h)$  que l'on a introduit au paragraphe 1.1.2.1 caractérise la force de la turbulence à l'altitude  $h$ . On peut en fait faire l'hypothèse que l'atmosphère est constitué de couches turbulentes discrètes et indépendantes qui se comportent comme des écrans de phase. On passe d'un profil continu de  $C_n^2$  à un profil discret. Dans cette modélisation, l'onde électromagnétique traverse successivement les différentes couches turbulentes aux altitudes  $\{h_i\}$  avant d'arriver au sol. Chaque couche est supposée infiniment fine devant le trajet de propagation entre deux altitudes  $h_i$ .

Le profil de  $C_n^2$  joue un rôle essentiel dans ce modèle puisqu'il donne l'information sur la répartition dans les différentes couches de la turbulence atmosphérique. Il existe des modèles théoriques de profil de  $C_n^2$  [Huf74]. On a présenté en figure 1.2 des profils de  $C_n^2$  mesurés à San Pedro-Martir par Remy Avila [AVC01] durant la nuit du 16 au 17 mai 2000 et en utilisant la méthode du Scidar Généralisé [FTV98]. On voit sur cette série de profils que l'altitude des couches prépondérantes varie assez peu dans le temps. Les couches principales se situent au niveau du sol, vers 4 km et vers 10 Km. Entre ces couches et jusqu'à 18 ou 20 Km, on trouve des couches de moindre force. L'atmosphère se comporte effectivement comme si elle était composée de couches discrètes à altitudes données. La valeur du  $C_n^2$  couche à couche, elle, varie par contre beaucoup dans le temps.

### 1.1.2.4 Fluctuations de la phase turbulente

Pour déduire les statistiques des fluctuations de la phase turbulente de celles de l'indice de réfraction, il faut faire l'hypothèse simplificatrice que, dans l'application qui nous intéresse, les effets diffractifs liés à la propagation de Fresnel entre les couches sont négligeables par rapport aux effets de fluctuations de phase. Cela signifie que la turbulence est considérée comme faible dans chaque couche et la distance de propagation dans l'atmosphère courte. On dit qu'on se place dans l'approximation de champs proche [Rod81].

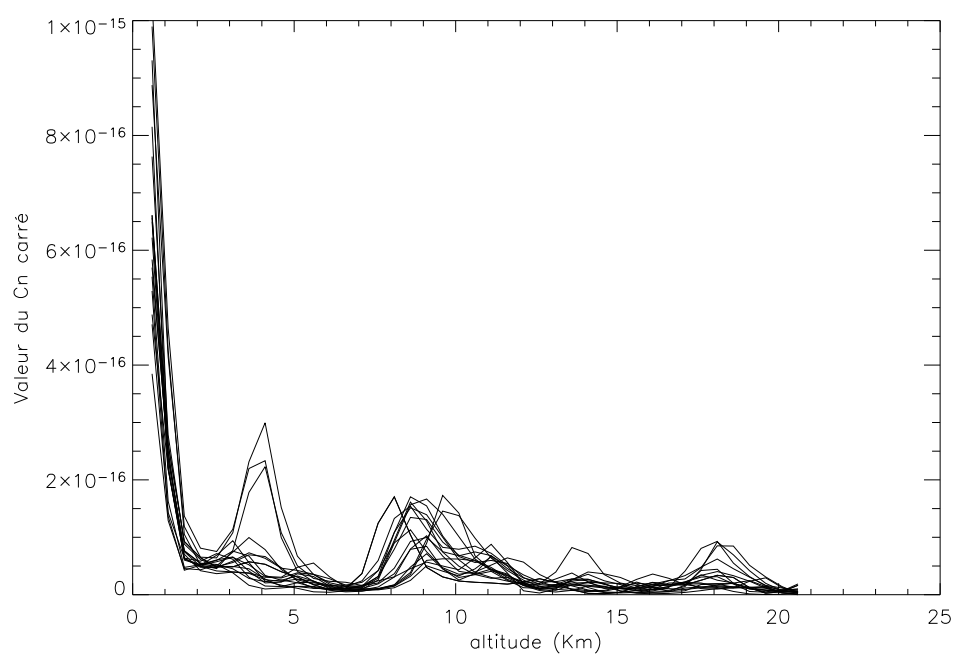


FIG. 1.2 – Profils de  $C_n^2$  mesurés à San Pedro-Martir dans un intervalle de temps de quatre heures durant la nuit du 16 au 17 mai 2000 par la méthode du Scidar Généralisé.

Sous cette hypothèse, on peut écrire la propagation à travers la turbulence comme une sommation des perturbations de front d'onde sur les différentes couches :

$$\phi^{tur}(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi^{tur}(\mathbf{r}, h_i), \quad (1.12)$$

où on note  $\phi$  les phases dans la pupille,  $\varphi$  les phases dans le volume et  $\{h_i\}$  les altitudes des couches. Les variations de phase turbulente sont reliées à celles de l'indice de réfraction par

$$\phi^{tur}(\mathbf{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_{n,h} \quad (1.13)$$

et on peut alors déduire de (1.8) pour une couche turbulente à l'altitude  $h$  la fonction de structure de la phase turbulente

$$D_\phi(\rho, h) = \langle (\phi(\mathbf{r}, h) - \phi(\mathbf{r} + \rho, h)) \rangle \quad (1.14)$$

$$= 2.91 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h \rho^{5/3}, \quad (1.15)$$

où  $\delta h$  est l'épaisseur de la couche considérée. En sommant sur toutes les couches, on obtient

$$D_\phi(\rho) = 6.88 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.16)$$

Le Spectre de Puissance Spatiale des fluctuations de phase devient, en supposant une statistique de Kolmogorov

$$W_\phi(f) = 0.023 \left( \frac{1}{r_0} \right)^{5/3} f^{-11/3}, \quad (1.17)$$

où  $r_0$  est le paramètre de Fried.

### 1.1.3 Caractérisation spatiale dans la pupille sur une base modale

#### 1.1.3.1 Une base de modes discrète

On va décomposer à partir de maintenant la phase sur une base de modes discrète et orthonormée. Il est souvent intéressant et pratique d'exprimer les caractéristiques de la phase sur une telle base. On peut en effet, en choisissant une base dont les modes sont classés par ordre spatial croissant, concentrer ainsi l'essentiel de l'énergie de la turbulence sur quelques modes.

On pourrait en théorie se placer dans n'importe quelle base discrète orthonormée. En pratique, celle que nous utiliserons et qui est classique en Optique Adaptative est la base des polynômes de Zernike.

Proposés par Zernike en 1934, les polynômes de Zernike sont définis sur une pupille circulaire et s'expriment en fonction d'un ordre radial  $n$  et d'un ordre azimutal  $m$  :

$$\text{si } m \neq 0, \quad \mathbf{Z}_{i \text{ pair}} = \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \cos m\theta \quad (1.18)$$

$$\mathbf{Z}_{i \text{ impair}} = \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \sin m\theta \quad (1.19)$$

$$\text{pour } m = 0, \quad \mathbf{Z}_i = \sqrt{n+1} R_n^0(\mathbf{r}) \sqrt{2}, \quad (1.20)$$

où  $(\mathbf{r}, \theta)$  sont les coordonnées polaires et

$$R_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{(m-n)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! ((n+m)/2 - s)! ((n-m)/2 - s)!} \mathbf{r}^{n-2s}. \quad (1.21)$$

Ils forment une base orthonormée, c'est-à-dire

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{Z}_i^*(\mathbf{r}) \mathbf{Z}_j(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}) = \delta_{i,j}, \quad (1.22)$$

avec  $S$  la surface sur laquelle on définit les polynômes de Zernike et  $\delta_{i,j} = 0, \forall i \neq j$  et  $\delta_{i,i} = 1, \forall i$ .

On présente en figure 1.3 les premiers coefficients de Zernike, où l'on voit notamment que les premiers ordres radiaux correspondent aux plus basses fréquences spatiales et les hauts ordres à de hautes fréquences. Cette propriété nous permettra de bien représenter la turbulence atmosphérique en utilisant un nombre limité de modes.

On utilisera souvent, par abus de langage, le terme “les zernikes” pour désigner les polynômes de Zernike.

### 1.1.3.2 Caractéristiques spatiales de la turbulence sur les zernikes

Sur la base des zernikes, la phase turbulente  $\phi^{tur}$  s'exprime comme une somme pondérée des  $\mathbf{Z}_i$  :

$$\phi^{tur} = \sum_i \phi^{tur,i} \mathbf{Z}_i, \quad (1.23)$$

les  $\phi^{tur,i}$  sont les coefficients de Zernike de la phase turbulente  $\phi^{tur}$ . Inversement, les coefficients s'expriment comme

$$\phi^{tur,i} = \frac{1}{S} \int_S \phi^{tur}(\mathbf{r}) \mathbf{Z}_i(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}). \quad (1.24)$$

Avec cette représentation et à partir du spectre de Kolmogorov, Noll a obtenu [Nol76] les variances des coefficients de Zernike

$$\begin{aligned} \langle \phi^{tur,i} \phi^{tur,j} \rangle = & 3.90 ((n+1)(n+2))^{1/2} (-1)^{(n_i+n_j-2m_i)/2} \delta_{m_i m_j} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \\ & \times \frac{2^{-14/3} \Gamma[14/3] \Gamma[(n_i+n_j-14/3+3)/2]}{\Gamma[(-n_i+n_j+14/3+1)/2] \Gamma[(n_i-n_j+14/3+1)/2] \Gamma[(n_i+n_j+14/3+3)/2]} \end{aligned} \quad (1.25)$$

où  $D$  est le diamètre de la pupille sur laquelle on définit les zernikes,  $r_0$  le paramètre de Fried,  $n_i, m_i, n_j, m_j$  sont les ordres radiaux et azimutaux des polynômes de Zernike.

Entre autres, Noll montre alors à partir de (1.25) que la variance du coefficient turbulent  $\phi^{tur,i}$  est proportionnelle à  $\left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3}$  et  $(n+1)^{-11/3}$

$$\sigma_{tur,i}^2 \propto \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} (n+1)^{-11/3}. \quad (1.26)$$



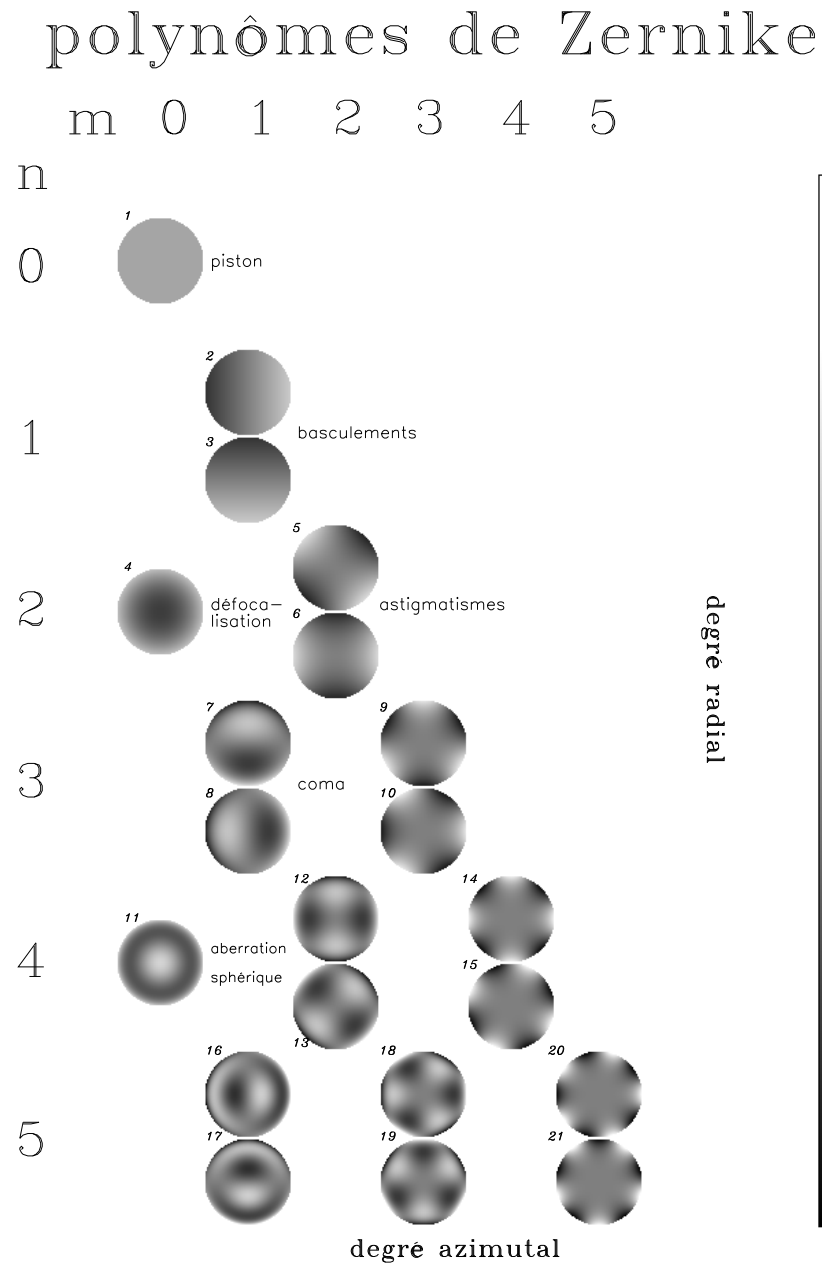


FIG. 1.3 – Polynômes de Zernike de 1 à 21 rangés en fonction de l'ordre radial (verticalement) et de l'ordre azimuthal (horizontalement)

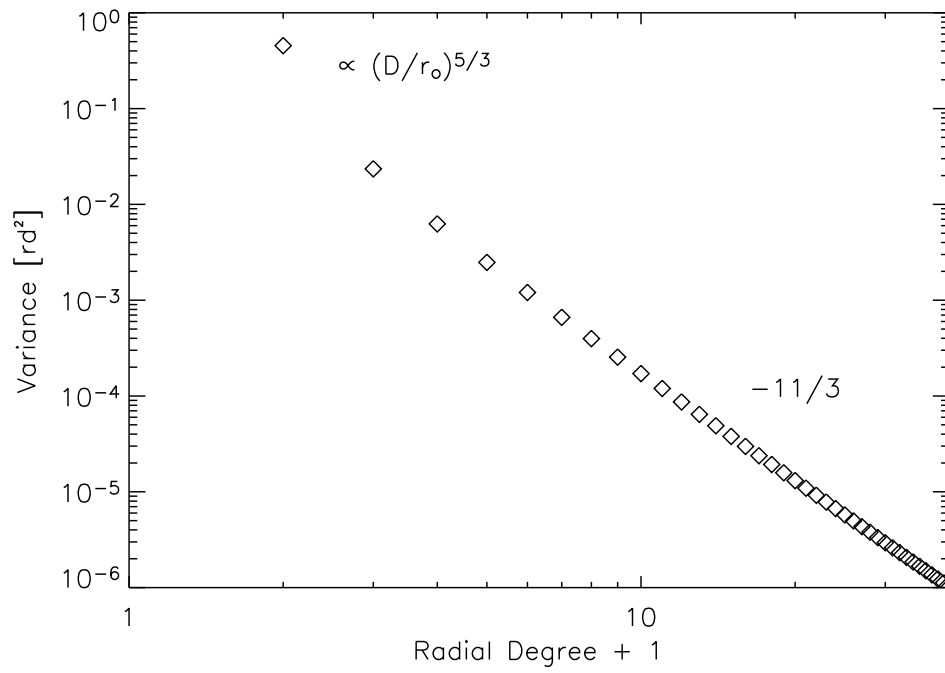


FIG. 1.4 – Évolution de la variance de phase turbulente  $\sigma_{tur,i}^2$  en fonction de l'ordre radial

On représente sur la figure 1.4 l'évolution de  $\sigma_{tur,i}^2$  en fonction de l'ordre radial.

Il faut noter que dans la base des zernikes, la matrice de covariance de la phase turbulente  $\mathbf{C}_\phi$  n'est pas diagonale. On définit la base de Karhunen-Loeve comme la base dans laquelle cette matrice est diagonale. Cette base est souvent obtenue en diagonalisant la matrice  $\mathbf{C}_\phi$  exprimée dans une autre base, par exemple les zernikes.

### 1.1.4 Caractérisation temporelle dans la pupille

Afin d'obtenir le spectre de puissance temporel (aussi dénommé Densité Spectrale de Puissance [DSP]) des coefficients de Zernike à partir de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_\phi$ , il faut faire l'hypothèse dite de Turbulence Gelée de Taylor [Tay38]. Cette hypothèse consiste à dire que la turbulence est constituée d'écrans de phase à différentes altitudes qui ont une statistique spatiale donnée et qui sont en translation uniforme à des vitesses  $\{V_i\}_{i=1: \text{nbre de couches}}$ .

En faisant l'hypothèse d'une turbulence gelée monocouche et en choisissant une statistique Kolmogorov pour les écrans de phase, J. -M. Conan obtient ainsi [Con94], [CRM95] que la DSP sur les zernikes d'une turbulence Taylor présente une fréquence de coupure  $f_c^n \simeq 0.3(n+1)V/D$ , où  $V$  est la vitesse de vent et  $D$  le diamètre du télescope. La DSP suit une puissance de  $-\frac{17}{3}$  et est proportionnelle à  $V/D$  après la fréquence de coupure. Avant la fréquence de coupure, le comportement est différent pour le Tip/Tilt (deux premiers modes, qui correspondent à au basculement) et pour les autres modes :

$$\text{avant } f_c^n, \text{ DSP}_n(f) \propto f^0, \forall n \neq 1 \quad (1.27)$$

$$\text{et } \text{DSP}_{n=1}(f) \propto f^{-2/3} \quad (1.28)$$

$$\text{après } f_c^n, \text{ DSP}_n(f) \propto f^{-17/3}, \forall n. \quad (1.29)$$

On a ainsi représenté en figure 1.5 les DSP du Tilt et du 21<sup>e</sup> mode de Zernike.

### 1.1.5 La turbulence volumique, le phénomène d'anisoplanétisme

On a dit que le profil de  $C_n^2$  caractérise la distribution en altitude de la force de la turbulence et on a déjà présenté la figure 1.2. La turbulence est donc volumique et présente en altitude jusqu'à 18 à 20 Km.

La conséquence principale de cette distribution en altitude est le phénomène dit d'anisoplanétisme, présenté sur la figure 1.6. La nature volumique de la turbulence implique que les fronts d'onde qui arrivent sur la pupille et qui proviennent de directions différentes ont traversé des couches d'atmosphère différentes. La phase turbulente est donc différente pour deux directions d'observation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Plus une couche turbulente est haute dans l'atmosphère, et plus les empreintes de la pupille du télescope dans les directions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sur cette couche sont disjointes. Les composantes turbulentes provenant de cette couche sont donc d'autant plus différentes entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . On comprend donc qu'une couche très turbulente à haute altitude aura plus d'effet d'anisoplanétisme qu'une couche aussi turbulente mais à basse altitude.

On constate sur les profils de  $C_n^2$  présentés, figure 1.6, qu'il reste de la turbulence présente jusqu'à une vingtaine de kilomètres. Le poids relatif du  $C_n^2$  dans ces couches et dans les couches basses règle la force de l'anisoplanétisme.

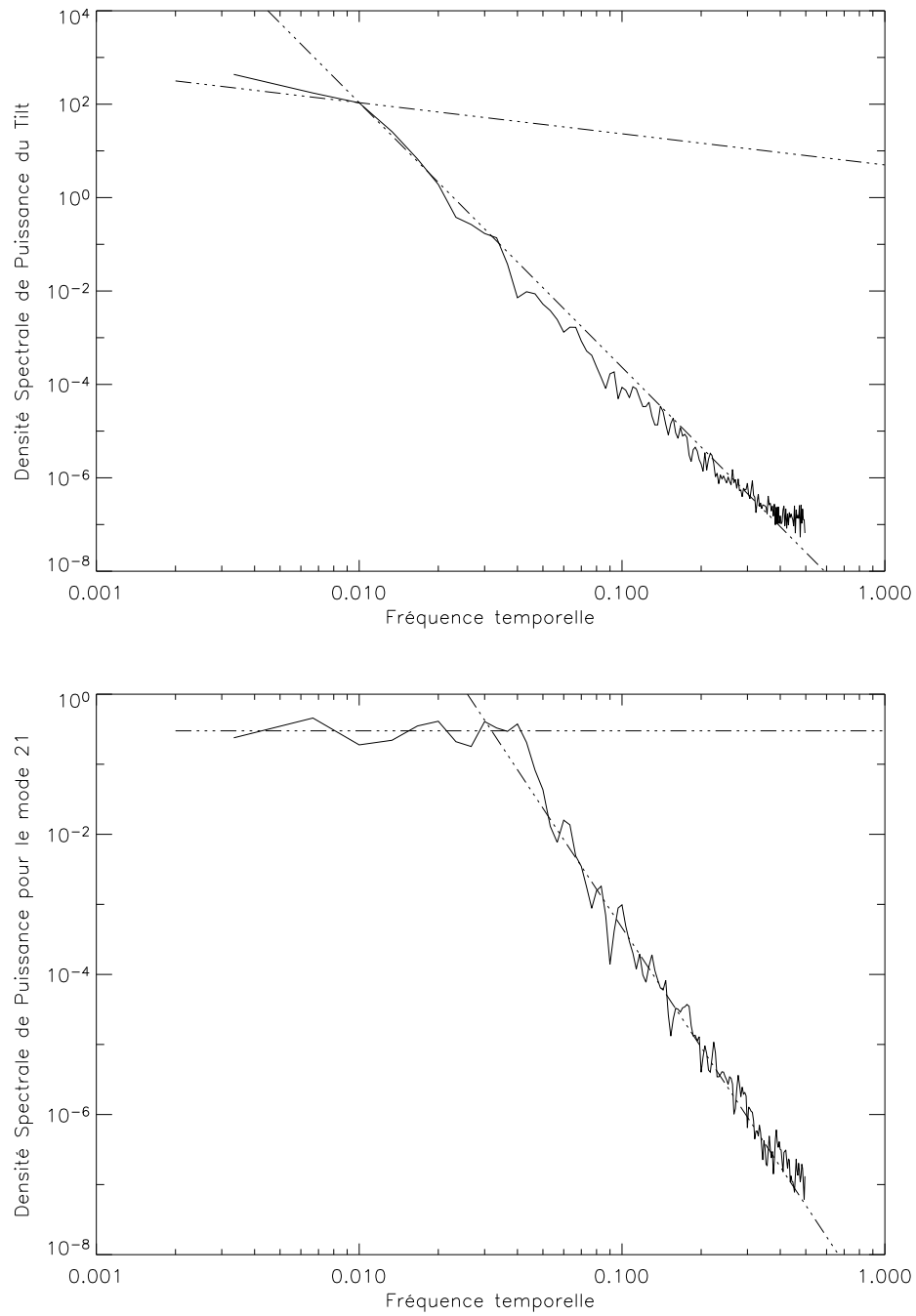


FIG. 1.5 – DSP turbulentes pour le tilt et le polynôme de Zernike 21 [trait plein]. Les courbes théoriques sont représentées pour comparaison [tiret-point]

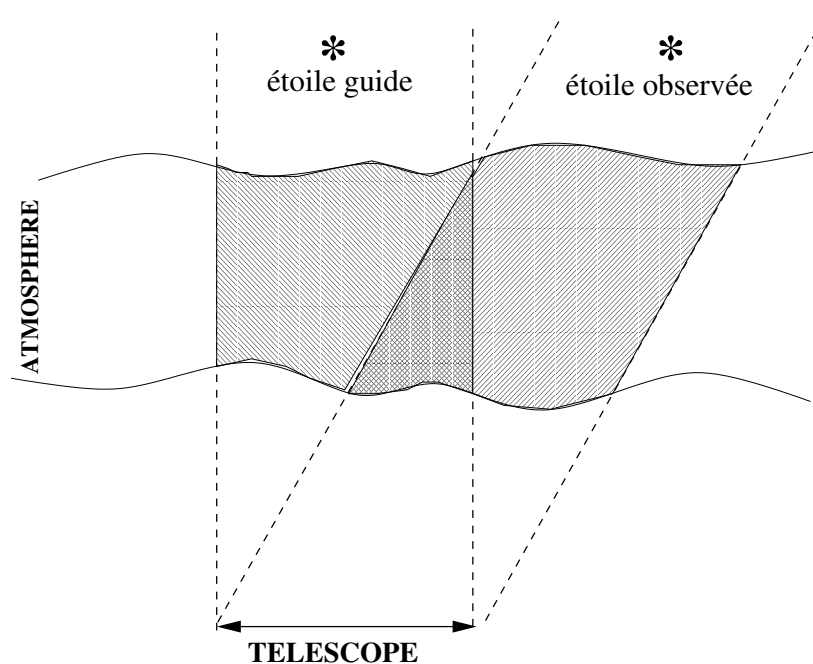


FIG. 1.6 – Le phénomène d'anisoplanétisme : la phase turbulente est différente dans toutes les directions alors que la correction d'un miroir dans la pupille est elle la même pour toutes les directions et optimisée dans la direction de l'EG.

Afin de caractériser de façon quantitative l'anisoplanétisme, on utilise la notion d'angle "isoplanétique"  $\theta_0$  dans lequel on suppose que les perturbations de phase sont identiques. On appelle domaine "isoplanétique" le champ défini par cet angle.

On peut utiliser différentes définitions de  $\theta_0$ . On choisira dans ce mémoire celle donnée par Fried [Fri82], qui correspond à une augmentation de la variance de phase de  $1 \text{ rad}^2$  vis-à-vis d'une correction parfaite et qui s'exprime en fonction du profil de turbulence :

$$\theta_0 = \left( 2.905 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos(\gamma)^{8/3} \int C_n^2(h) h^{5/3} dh \right)^{-3/5} \quad (1.30)$$

avec  $\gamma$  l'angle zénithal et  $\lambda$  la longueur d'onde. Cette équation peut se réécrire en fonction de  $r_0$  sous la forme [Rod81]

$$\theta_0 = 0.314 \frac{r_0}{\bar{h}}, \quad (1.31)$$

avec  $\bar{h}$  une altitude moyenne pondérée par le  $C_n^2$  :

$$\bar{h} = \left( \frac{\int_0^\infty h^{5/3} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right)^{3/5}. \quad (1.32)$$

## 1.2 Optique Adaptative et Optique Adaptative Multiconjuguée

### 1.2.1 Optique Adaptative classique

L'objet de l'Optique Adaptative est rendre au télescope une résolution la plus proche possible de sa résolution théorique en corrigeant directement la forme du front d'onde incident. Cela peut se faire à l'aide d'un miroir déformable, qui compense en temps réel les avances et retards de phase.

Un système d'optique adaptative se compose essentiellement d'un miroir déformable [MD], que l'on décompose pour des raisons de mise en œuvre en un miroir Tip/Tilt (ou miroir de basculement) et un miroir déformable qui corrige les hauts ordres, et d'un analyseur de surface d'onde [ASO] placé derrière le miroir et qui mesure la phase résiduelle. On pointe le système sur une source de référence, dite Étoile Guide [EG]. On sait que le front d'onde provenant de l'EG, si cette dernière est située à l'infini, hors perturbation doit être plan. L'écart à la planéité du front d'onde mesuré correspond alors à la perturbation à corriger. L'objectif est d'annuler la variance spatiale de la phase résiduelle. A partir des mesures de l'analyseur, on détermine les nouvelles tensions du miroir telles que la variance de phase résiduelle soit minimale. La figure 1.7 (issue de [Fus00]) représente l'ensemble du système d'OA classique. Nous allons présenter ici les deux blocs constitutifs du système d'OA classique, la correction et l'analyse et nous présenterons également les notions de boucle fermée, boucle ouverte, système statique ou dynamique.

#### 1.2.1.1 Le miroir, la voie de correction

**1.2.1.1.1 Les différents types de miroirs :** Il existe différents type de miroirs déformables. On pourra en trouver une étude détaillée dans [Sec99]. On se contentera ici de donner le principe de

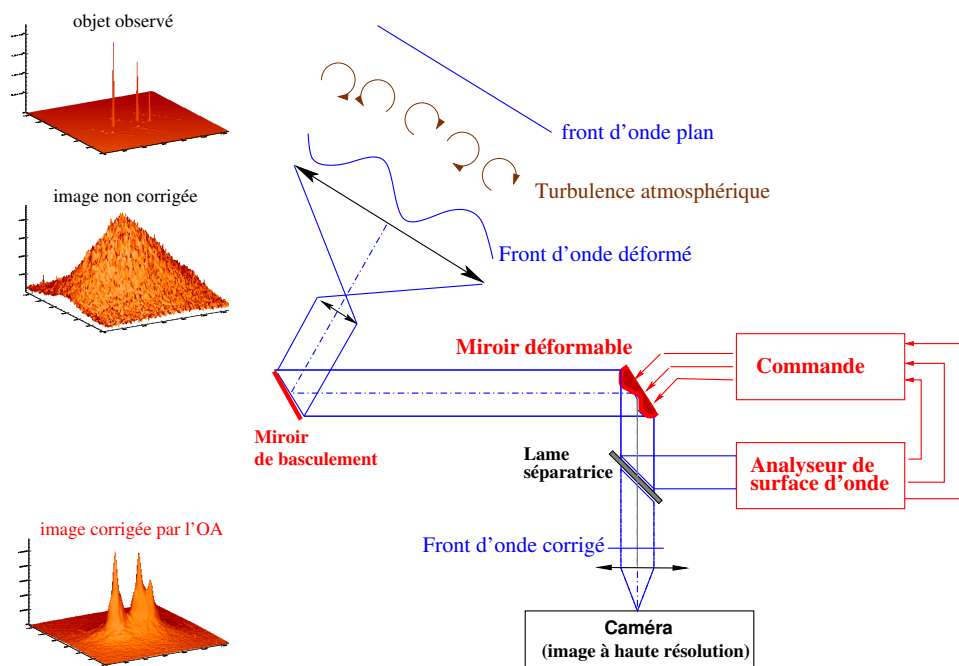


FIG. 1.7 – Le système d’OA classique boucle fermée. L’analyseur de surface d’onde est placé derrière les miroirs et donne des mesures de phase résiduelle à partir desquels on détermine les nouvelles tensions.

fonctionnement de deux catégories de miroirs, les miroirs de type SAM (Stacked Actuators Mirror) et les miroirs bimorphes.

Dans les deux cas, le miroir déformable est constitué d'une fine couche flexible et réfléchissante déformée par des actionneurs accolés derrière elle, que l'on excite en leur appliquant des courants électriques.

Dans les miroirs de type SAM, les actionneurs sont des piézoélectriques qui poussent ou tirent sur la surface du miroir suivant une direction normale à la surface, comme des pistons. On les utilise généralement avec un analyseur de type Shack Hartmann, présenté en paragraphe 1.2.1.2. Dans les miroirs bimorphes, les actionneurs agissent parallèlement à la surface du miroir et la courbent localement. Ils sont en général utilisés avec des analyseurs de courbure (*cf.* 1.2.1.2).

On utilise en général en plus d'un de ces miroirs déformables un miroir dit de Tip/Tilt ou miroir de basculement dédié à la correction du Tilt. En effet les miroirs SAM ou bimorphes n'ont généralement pas une dynamique suffisante pour corriger ce mode, dont la variance turbulente est élevée et qu'il est donc important de bien corriger. La surface du miroir de basculement est plane et son orientation est réglable.

**1.2.1.1.2 Propriétés :** On caractérise spatialement un miroir déformable par le nombre et la position des actionneurs et la forme que ces derniers donnent au MD lorsqu'ils sont actionnés, c'est-à-dire leurs fonctions d'influence. La fréquence spatiale maximale qu'un miroir déformable est capable de corriger peut être approchée par  $f_{max}^{MD} = 1/d_{act}$ , avec  $d_{act}$  la distance entre deux actionneurs.

La fonction d'influence d'un actionneur est définie comme la phase optique créée par la déformation de cet actionneur lorsqu'on lui applique une tension d'une unité. On a représenté en figure 1.8 la fonction d'influence de l'actionneur numéro 40 du miroir déformable SAM du Banc d'Optique Adaptative de l'ONERA, mesuré à l'aide d'un interféromètre de type Zygo.

La phase créée par un actionneur au niveau des actionneurs adjacents n'est pas nulle. On définit le coefficient de couplage comme la hauteur de la surface du miroir au dessus d'un actionneur adjacent. Il est généralement de l'ordre de quelques dizaines de %.

Si on considère souvent théoriquement que la fonction d'influence est la même pour tous les actionneurs (des formes théoriques pour un SAM sont données dans [Sec99]), il faut en pratique pour caractériser un miroir, mesurer expérimentalement les fonctions d'influence de chaque actionneur et le faire régulièrement. Elle évolue effectivement en fonction de nombreux paramètres, notamment la température.

Ces fonctions d'influence donnent donc une correspondance entre l'espace des phases et l'espace des tensions  $\mathbf{u}$ . On dit qu'on connaît alors le modèle du miroir et on symbolise cette relation par la matrice  $\mathbf{N}$ . Cette matrice est de taille (nombre de modes de décomposition de la phase)  $\times$  (nombre d'actionneurs). Elle contient sur chaque colonne la fonction d'influence d'un actionneur décomposée dans une base de mode, quelle qu'elle soit.

La phase  $\phi^{cor}$  produite par un miroir auquel on applique les tensions  $\mathbf{u}$  est ainsi donnée par :

$$\phi^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}. \quad (1.33)$$

D'un point de vue temporel, la dynamique d'un MD est caractérisée par ses fréquences de résonance. La première fréquence de résonance d'un MD est généralement de l'ordre de la dizaine de KHz.



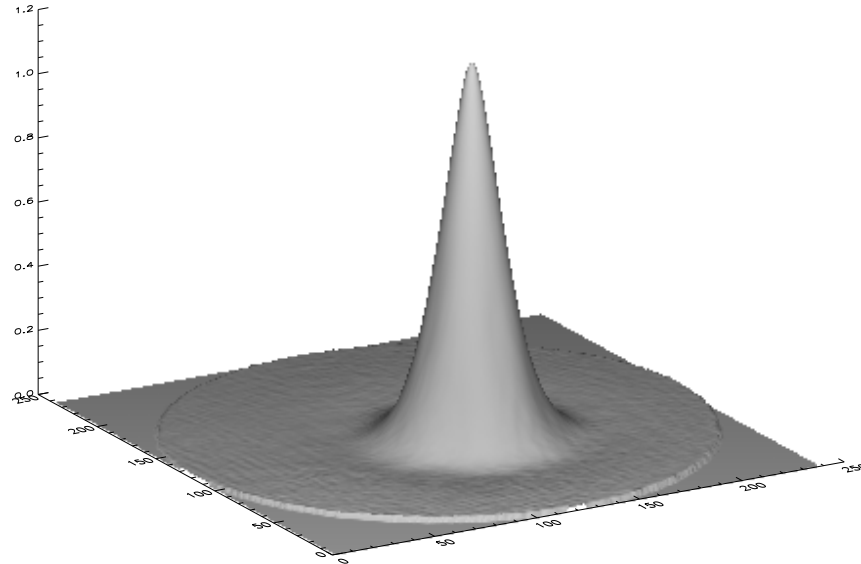


FIG. 1.8 – Fonction d'influence de l'actionneur numéro 40 du miroir SAM du Banc d'Optique Adaptative de l'ONERA

### 1.2.1.2 L'analyse de surface d'onde

On a dit que les nouvelles tensions du miroir sont déterminées à partir des mesures d'un analyseur de surface d'onde de façon à minimiser la phase résiduelle. Il existe plusieurs types d'analyseurs dont les plus classiques sont l'analyseur de Shack-Hartmann, l'analyseur à pyramide, l'analyseur de courbure ... Les deux premiers mesurent la dérivée de la phase turbulente et le second mesure le coefficient de courbure du front d'onde. On va présenter ces différents analyseurs et donner leurs caractéristiques.

**1.2.1.2.1 Le Shack-Hartmann :** L'analyseur de Shack-Hartmann est un analyseur plan pupille. Il est constitué d'une matrice de micro-lentilles et d'une caméra placée au foyer des micro-lentilles. On va le présenter en détail parce que c'est celui qui sera utilisé dans tous les travaux présentés dans ce mémoire. On a représenté en figure 1.9 [Fus00] le fonctionnement de cet analyseur. Le front d'onde plan qui arrive sur la matrice de micro-lentilles est focalisé localement par chaque lentille sur la caméra au centre de chaque sous-pupille. Si le front d'onde est localement incliné par rapport aux micro-lentilles, la tache lumineuse sur la caméra est déplacée. Plus le front d'onde est localement incliné et plus la tache lumineuse est éloignée du centre de la sous-pupille. Comme l'image sur la caméra est généralement une tache et pas un point, on caractérise sa position par le centre de gravité

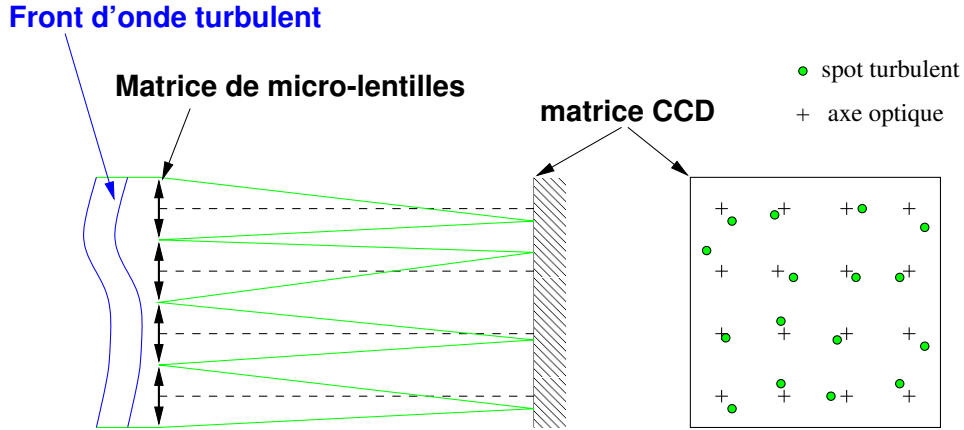


FIG. 1.9 – Schéma de fonctionnement de l'analyseur de Shack-Hartmann

de la tache. On note  $c_x$  la position du centre de gravité selon  $x$  et  $c_y$  sa position selon  $y$ ,

$$c_x = \frac{\sum_{i,j} x_{i,j} I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}} \quad (1.34)$$

$$c_y = \frac{\sum_{i,j} y_{i,j} I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}}, \quad (1.35)$$

où  $I_{i,j}$  et  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  sont l'intensité lumineuse et la position du pixel  $(i, j)$ . On peut remonter [Rou99], à partir de  $c_x$  et  $c_y$  à la pente moyenne  $\alpha$  du front d'onde sur la sous-pupille. On montre en effet que, selon  $x$

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2\pi S_{ml}} \int_{ml} \frac{d\phi}{dx} dx dy = \frac{c_x}{fM}, \quad (1.36)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $S_{ml}$  la surface de la micro lentille,  $\int_{ml}$  symbolise l'intégration sur toute la surface de la micro-lentille,  $f$  est la focale de la micro-lentille et  $M$  le grossissement. On obtient de façon similaire la pente moyenne selon  $y$ ,  $\alpha_y$ . Généralement, pour diminuer le bruit sur la mesure, on ne calcule pas le centre de gravité directement. On peut soit seuiller l'image obtenue par la caméra soit la fenêtrer (ne calculer le barycentre qu'à l'intérieur d'une fenêtre) soit les deux. Le calcul du barycentre obtenu alors est moins bruité. Une étude détaillée de ces techniques est donnée dans [Noe97].

On peut également estimer le déplacement de la tache sur la caméra avec une approche par auto-corrélation [MRF92]. Cette technique est le plus souvent utilisée pour l'analyse de front d'onde sur sources étendues (observation du soleil par exemple).

On a dit qu'on utilise généralement l'analyseur SH avec un miroir de type SAM. En dimensionnant le système, on choisit généralement d'égaliser la distance inter-actionneur du miroir et la taille des sous-pupilles. Ainsi, la fréquence maximale que le miroir peut corriger  $f_{max}^{MD}$  est égale à la fréquence maximale mesurée par l'analyseur  $f_{max}^{SH}$ . La fréquence  $f_{max}^{SH}$  peut en effet être considérée égale à l'inverse de la taille  $d_{spp}$  d'une sous-pupille,  $f_{max}^{SH} = \frac{1}{d_{spp}}$ .

Pour la mesure de petites phases, l'analyseur est linéaire. Quand la phase est grande, il y a des risques que la tache sur la caméra sorte en partie de la sous-pupille et donc des risques de non-linéarité. Dans le domaine de linéarité du SH, on peut définir la matrice  $\mathbf{D}$  qui contient sur chaque colonne la réponse du SH à un mode turbulent :

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}\phi, \quad (1.37)$$

où  $\phi$  est une phase exprimée sur une base de modes et  $\mathbf{p}$  les pentes mesurées par l'analyseur.

On caractérise par la matrice d'interaction  $\mathbf{D}_{int}$  la correspondance entre les mesures du SH et les tensions appliquées au miroir. On détermine  $\mathbf{D}_{int}$  en appliquant consécutivement sur chaque actionneur du miroir des tensions données et en mesurant la réponse de l'analyseur. Chaque colonne de  $\mathbf{D}_{int}$  correspond à la réponse de l'analyseur à la déformée d'un actionneur. Les tensions  $\mathbf{u}$  appliquées au miroir sont reliées aux pentes  $\mathbf{p}$  mesurées par l'analyseur par

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}_{int}\mathbf{u}. \quad (1.38)$$

On peut noter que si on déterminait  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{D}$  sur un nombre infini de modes, on pourrait relier  $\mathbf{N}^\infty$ ,  $\mathbf{D}^\infty$  et  $\mathbf{D}_{int}$  par

$$\mathbf{D}_{int} = \mathbf{D}^\infty \mathbf{N}^\infty. \quad (1.39)$$

Connaissant  $\mathbf{D}_{int}$ , à partir de mesures de pentes  $\mathbf{p}$ , on peut reconstruire les tensions correspondantes et qu'il faut soustraire pour annuler la phase résiduelle, en appliquant l'inverse généralisée de  $\mathbf{D}_{int}$  à  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}_{int}^+ \mathbf{p} = \left( \mathbf{D}_{int}^T \mathbf{D}_{int} \right)^{-1} \mathbf{D}_{int}^T \mathbf{p}, \quad (1.40)$$

où  $^T$  représente la transposition matricielle. Quand  $(\mathbf{D}_{int}^T \mathbf{D}_{int})$  est mal conditionnée, il faut l'inverser par décomposition en valeurs singulières tronquée (TSVD) [Idi01].

Si on considère maintenant la matrice  $\mathbf{D}$  dans le cas particulier de la base des modes de Zernike, on peut remonter de la même façon qu'en (1.40) à la phase exprimée sur la base des modes de Zernike à partir des mesures de pente. On peut alors montrer [RG92] que le bruit se propage lors de la reconstruction selon un coefficient de propagation  $p_{m,n}$  sur le mode d'ordre radial  $n$  et de fréquence azimutale  $m$

$$p_{m,n} = 0.295(n+1)^{-2.05} \text{ si } n = m \quad (1.41)$$

$$p_{m,n} = 0.174(n+1)^{-2} \text{ si } n \neq m. \quad (1.42)$$

On dira dans la suite que le bruit sur un SH est proportionnel à  $(n+1)^{-2}$  et on considérera que le bruit sur les modes de Zernike d'ordre radial  $n$  est

$$w_n = \frac{1.28}{RSB} \left( \frac{D/r_0}{n_{sspp}} \right)^{\frac{5}{3}} (n+1)^{-2}, \quad (1.43)$$

où  $n_{sspp}$  est le nombre de sous-pupilles sur une ligne de la matrice de micro-lentilles et RSB désigne le Rapport Signal à Bruit que l'on définit comme le rapport de la variance d'angle d'arrivée sur une sous-pupille sur la variance de bruit :

$$RSB = \frac{\sigma_{aa}^2}{\sigma_b^2}. \quad (1.44)$$

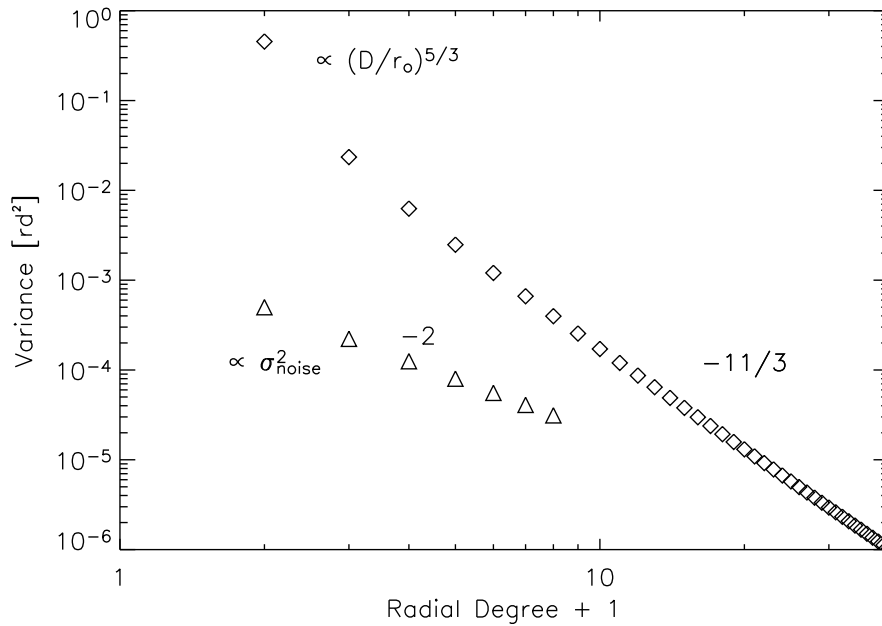


FIG. 1.10 – Évolution des variances de bruit et de phase turbulente en fonction de la fréquence spatiale

La mesure s'écrit alors

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\phi + \mathbf{W}, \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{W}$  est le vecteur de bruit de mesure. On a représenté pour illustration en figure 1.10 l'évolution des variances de bruit et de phase turbulente en fonction de l'ordre radial de polynômes de Zernike.

On a dit que la fréquence spatiale maximale qu'un SH pouvait mesurer était de l'ordre de  $1/d_{spp}$ . Les fréquences plus élevées produisent sur l'ASO un effet similaire à des basses fréquences. Il s'agit d'un phénomène de repliement de spectre et on parle d'Aliasing [Rou99]. Les fréquences plus élevées se replient sur des fréquences plus basses.

**1.2.1.2.2 L'analyseur à pyramide :** L'analyseur à pyramide a été proposé en 1996 par R. Ragazzoni [Rag96]. C'est un analyseur plan focal dont la mesure dépend de la dérivée de la phase. La pyramide agit en fait comme quatre "couteaux de Foucault". Le faisceau lumineux qui arrive au sommet de la pyramide produit après elle quatre images de la pupille sur un plan d'observation. La dérivée de la phase selon  $x$  est reliée à la différence d'intensité dans les cadrans  $x > 0$  et  $x < 0$  (cf. figure 1.11), de même, la dérivée de la phase selon  $y$  est reliée à la différence d'intensité dans les cadrans  $y > 0$  et  $y < 0$ .

La pyramide décrit dans le plan focal un cercle. Du rayon  $r$  de cette modulation dépend la sensibilité de l'analyseur à pyramide. Plus  $r$  est grand, plus la pyramide est sensible aux hautes fréquences spatiales. Ragazzoni a proposé récemment de remplacer la modulation par une surface diffusante placée dans un plan pupille intermédiaire, et qui permettrait d'avoir accès aux hautes fréquences spatiales sans moduler [RDV02].

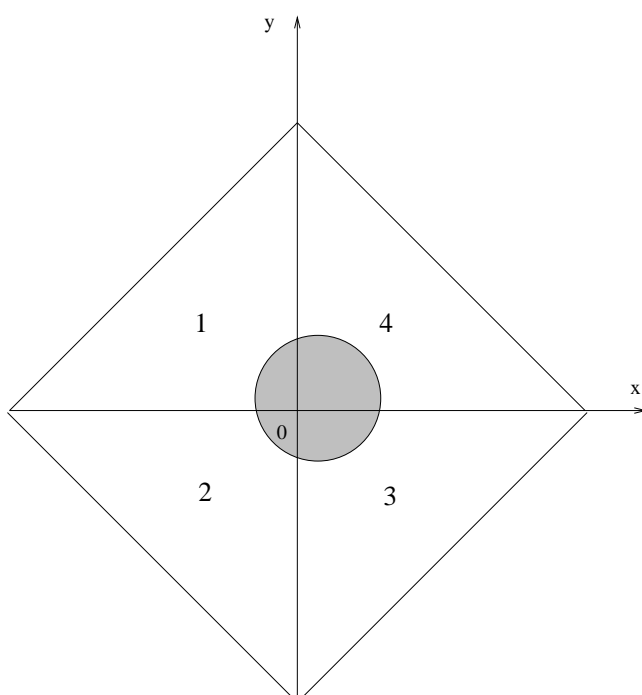


FIG. 1.11 – Représentation d'un analyseur à pyramide. La zone grisée correspond à la tache lumineuse. La dérivée de la phase selon  $x$  peut être reliée à la différence d'intensité dans les demies pyramides de droite (quartiers 3 et 4) et de gauche (quartiers 1 et 2).

**1.2.1.2.3 L'analyseur à courbure :** L'analyseur à courbure a été proposé par Roddier en 1988 [Rod88]. Il donne accès directement au rayon de courbure du front d'onde. Il consiste à mesurer l'intensité  $I_1$  dans un plan  $P_1$  à une distance  $l$  du plan focal et l'intensité  $I_2$  dans le plan  $P_2$  situé à la même distance mais de l'autre côté du plan focal. On peut alors montrer, sous certaines conditions que la différence relative

$$\beta = \frac{I_1(\mathbf{r}) - I_2(-\mathbf{r})}{I_1(\mathbf{r}) + I_2(-\mathbf{r})} \quad (1.46)$$

donne accès à la dérivée seconde de la phase dans la pupille ainsi que sa dérivée première aux bords de la pupille.

### 1.2.1.3 L'étoile laser

R. Foy et M. Tallon ont proposé en 1985 [TF90] d'utiliser comme étoile de référence une étoile artificielle créée à l'aide d'un laser avec lequel on excite des atomes de la couche de sodium de l'atmosphère située à une centaine de kilomètres d'altitude. L'étoile laser peut être positionnée n'importe où dans le champ, elle permet donc au système de ne pas dépendre de la position aléatoire des étoiles naturelles [Via01] [REM95] [Rag95].

Comme principales limitations, on notera l'incapacité à mesurer le Tip/Tilt [RG92] et l'effet de cône, lié au fait que l'étoile laser est à distance finie et que le front d'onde qui en provient n'est donc pas plan mais sphérique [Ty194].

### 1.2.1.4 Boucle ouverte ou fermée, système statique ou dynamique

**1.2.1.4.1 Boucle ouverte ou fermée :** On a présenté le principe d'un système d'Optique Adaptative Classique boucle fermée. Par le terme "boucle fermée" [BF], on sous-entend que l'ASO est placé derrière le miroir et mesure la phase résiduelle. Cette configuration permet à l'analyseur de travailler dans son domaine de linéarité qui se restreint aux petites phases. Mais on peut envisager un système où l'analyseur mesurerait directement la phase turbulente avant la correction du miroir. Les nouvelles tensions du miroirs seraient toujours choisies à partir des mesures de l'ASO. Un tel système est dit boucle ouverte [BO]. On a présenté en figure 1.12 des schémas blocs des deux systèmes pour comparaison.

**1.2.1.4.2 Boucle fermée dynamique :** Dans un système d'optique adaptative BF réaliste, la mesure de front d'onde et le calcul des nouvelles tensions à appliquer prennent un certain temps. Il y a donc un décalage temporel entre l'arrivée sur l'ASO d'un front d'onde et la correction du miroir. Si on considère qu'on utilise une trame  $T$  pour l'intégration de la caméra de l'ASO et une trame pour la lecture de la caméra et le calcul des nouvelles tensions, il y a un décalage de deux trames. On parle d'un retard de deux trames. On distingue parfois le retard incompressible d'intégration de la caméra et le retard de lecture-calcul. On parle alors d'une seule trame de retard pur. La phase de correction appliquée au temps  $t$  est en fait adaptée à la phase turbulente au temps  $t + 2T$ . Que l'on ignore ce retard ou qu'on le prenne en compte dans la commande, on commet une erreur dite erreur temporelle. On peut montrer [CRM95] que si on ne tient pas compte du retard pour choisir la commande et si on utilise un intégrateur, alors l'erreur temporelle sur un mode d'ordre radial  $n$  est proportionnel en

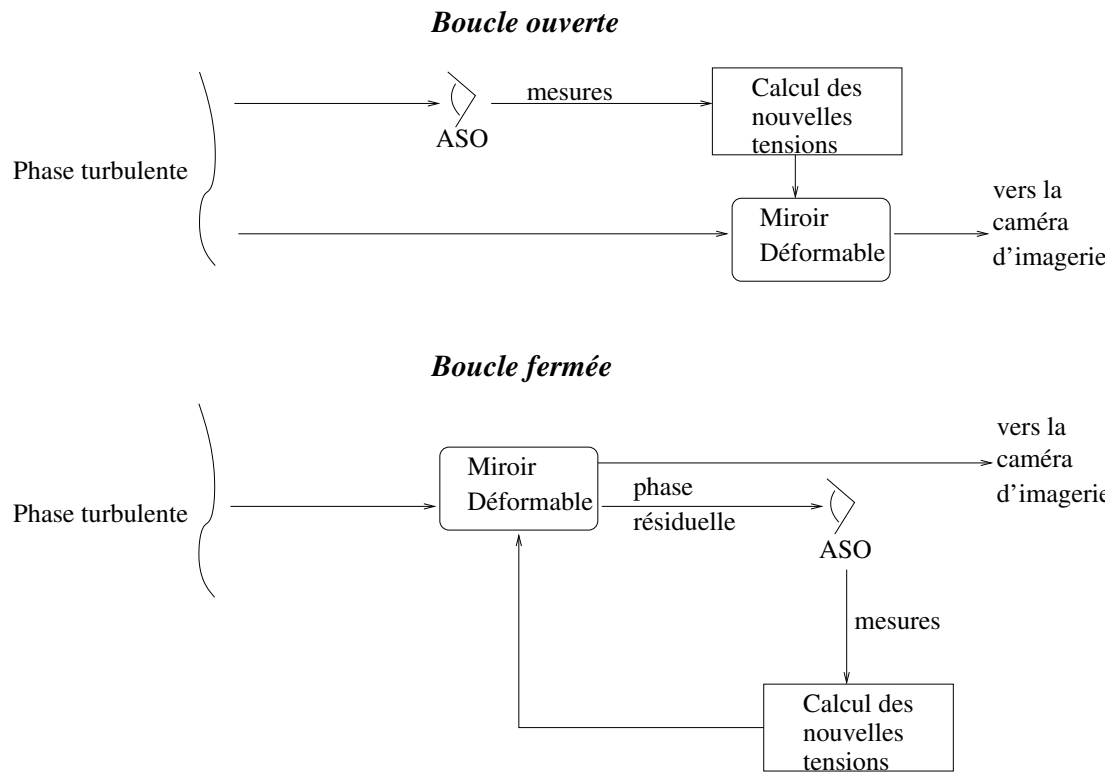


FIG. 1.12 – Schémas-blocs d'un système boucle ouverte et d'un système boucle fermée

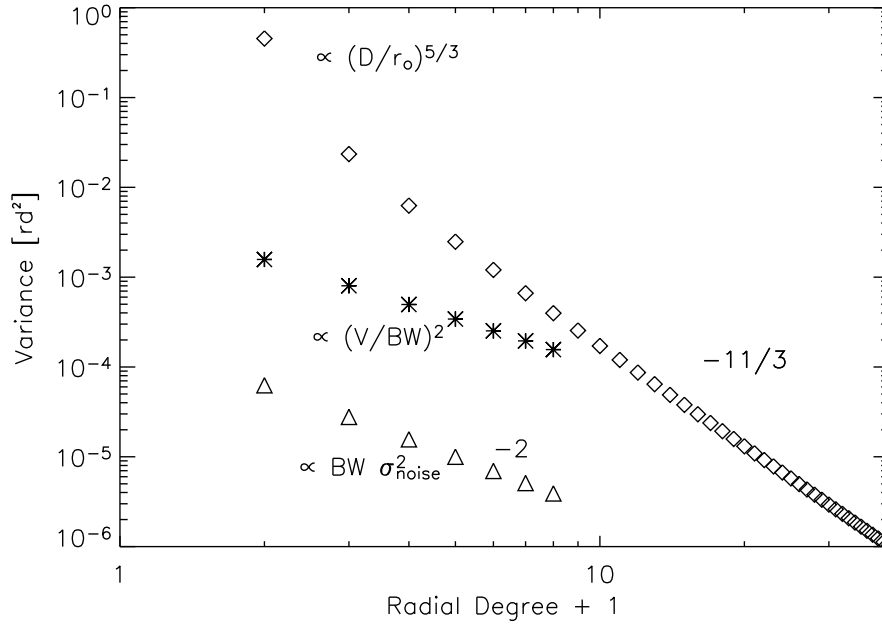


FIG. 1.13 – Évolution des variances d’erreur d’analyse, d’erreur temporelle, et de phase turbulente en fonction de l’ordre radial de polynôme de Zernike. BW désigne la bande passante BP (BandWidth en anglais) du système.

variance de phase à  $(n+1)^{-5/3}$ . On a présenté en figure 1.13 l’évolution de la variance de bruit d’analyse propagée dans la boucle et d’erreur temporelle vis-à-vis de l’évolution de la variance turbulente. Un tel système est dit boucle fermée “dynamique”.

On peut représenter l’évolution temporelle d’un tel système soit dans l’espace direct (nous développerons ce point de vue ultérieurement) soit dans l’espace des fréquences temporelles (espace de Fourier ou Laplace).

Dans cette dernière représentation, on note  $f$  la fréquence temporelle et on définit la notion de fonction de transfert comme le rapport entre la sortie et l’entrée d’un système. P. Y. Madec donne [Mad99] les expressions des fonctions de transfert des éléments constitutifs d’une OA et de la fonction de transfert dite “boucle ouverte”,  $G$ , qui s’obtient comme le produit des premières :

$$G(\omega) = \left( \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega T} \right)^2 \exp(-j\omega\tau) C(z = \exp(-j\omega T)), \quad (1.47)$$

où  $\omega$  est la pulsation définie comme  $\omega = 2\pi f$ , et  $z$  la variable de la transformation en  $z$ .  $\tau$  est le retard pur,  $T$  la période d’échantillonnage et  $C$  l’expression du correcteur. On définit également la fonction de transfert de la boucle fermée comme

$$H = \frac{G}{1 + G} \quad (1.48)$$



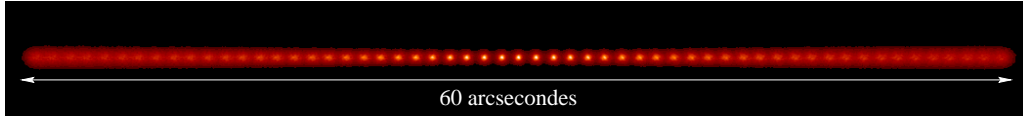


FIG. 1.14 – Images d’une étoile ponctuelle quand on s’éloigne de l’EG

et la fonction de réjection

$$E = \frac{1}{1 + G}. \quad (1.49)$$

Les principales caractéristiques temporelles d’un système boucle fermée dynamique sont déduites de ces fonctions. On peut définir notamment la bande passante  $BP$  du système comme la fréquence à laquelle s’annule la fonction de transfert de réjection<sup>1</sup>. On caractérise également la stabilité du système à partir de la fonction  $|G|$ . On peut montrer que si tous les pôles de  $|G|$  sont compris strictement entre  $-1$  et  $1$ , alors le système est stable. A partir de ce critère, on peut montrer que pour un système à deux trames de retard et dont l’asservissement est géré par un intégrateur, le gain maximal de l’intégrateur pour assurer la stabilité est de  $1$ .

**1.2.1.4.3 Boucle ouverte dynamique** On pourrait développer les mêmes notions pour les systèmes boucle ouverte dynamique. On nomme ainsi un système boucle ouverte qui comporte des retards entre la mesure et la correction. On commet de la même façon une erreur temporelle et l’étude temporelle d’un tel système passe, dans la représentation fréquentielle par la fonction de transfert  $G$ .

**1.2.1.4.4 Boucle ouverte statique** Dans le cas de la boucle ouverte, on peut également envisager un système plus simple dans lequel il n’y a pas de retard entre mesure et commande et où les considérations temporelles disparaissent. On estime une phase turbulente que l’on corrige immédiatement et on obtient la phase résiduelle. En d’autres termes, il n’y a pas d’évolution temporelle de la phase entre la mesure et l’application de la correction. On parle alors de système “statique”. Il s’agit en fait d’un cas d’étude formel, puisqu’un retard nul est en pratique impossible.

### 1.2.1.5 L’anisoplanétisme en sortie d’un système d’OA classique

En sortie d’un système d’OA classique, la variance de phase résiduelle sur l’EG est, si le système fonctionne correctement, sensiblement plus faible que la variance de phase turbulente. Dans le plan image, la largeur à mi-hauteur de la tache qu’on observait avant correction s’est rapprochée de  $\lambda/D$ , caractéristique de la diffraction du télescope et de sa résolution maximale. Néanmoins, si on s’éloigne de l’étoile de référence, on constate une perte de performance d’autant plus grande qu’on regarde loin de l’EG. On a représenté en figure 1.14 les images obtenues par simulation [Fus00] d’une étoile ponctuelle quand on s’éloigne de l’EG.

Ce phénomène trouve son origine physique dans la distribution volumique de la turbulence atmosphérique, qu’on a déjà présenté en paragraphe 1.1.5. La phase turbulente est différente dans toutes

<sup>1</sup>Notons que certains auteurs définissent la BP comme la valeur à  $-3$  dB.

les directions puisqu'à chaque direction correspond une section différente du volume. La correction d'un miroir dans la pupille est elle la même dans toutes les directions. Pour corriger un volume de turbulence, un seul miroir dans la pupille ne suffit donc pas. La figure 1.6 illustre ce phénomène.

En 1975, Dicke [Dic75] a proposé pour corriger cet effet de compenser le volume turbulent par un volume de correction, c'est-à-dire d'utiliser plusieurs miroirs déformables, conjugués à différentes altitudes. Il s'agit du concept d'Optique Adaptative Multiconjuguée [OAMC].

### 1.2.2 Optique Adaptative Multiconjuguée

Proposé en 1975, le concept d'Optique Adaptative Multiconjuguée a donné lieu à de nombreuses études, mais surtout depuis les années 90, aussi bien des études théoriques [Bec88], [TFV92], [Ell94], [RMV00], [FCMR02], [FCM<sup>+</sup>00b] [FCRM00], [FCR<sup>+</sup>01], [LL01], [LL00], [BCLR<sup>+</sup>01], [TLLS00], [FCR02] que d'études en vue de mises en œuvre [LCD<sup>+</sup>01], [FRE00], [Fli01] [BGF<sup>+</sup>02].

L'OAMC a pour objectif la compensation de l'anisoplanétisme et repose sur la correction de la turbulence atmosphérique par plusieurs miroirs optiquement conjugués en altitude. L'analyse du volume turbulent est faite sur plusieurs EG. Elle peut être faite selon deux approches différentes, mais toujours en utilisant plusieurs étoiles guides.

Dans la première approche d'analyse, dite "star oriented" [SO], il y a autant d'analyseurs que d'EG, chaque analyseur est dédié à une EG et mesure le front d'onde qui en provient. A partir de ces mesures dans des directions, il faut remonter à une information dans le volume et reconstruire la phase turbulente couche à couche pour commander les miroirs déformables. Le schéma de la figure 1.15 -droite représente cette méthode d'analyse .

Dans la deuxième approche, dite "layer oriented" [LO], les analyseurs ne sont pas dédiés chacun à une EG mais sont conjugués à une couche turbulente et récoltent la lumière de toutes les étoiles guides. On parle de plan d'analyse. Le schéma de la figure 1.15 -gauche représente cette méthode d'analyse. Dans l'approche LO locale [LOL] chaque plan d'analyse est conjugué à l'altitude d'un miroir déformable et on ferme indépendamment la boucle sur chaque couche. Dans l'approche LO globale [LOG], les mesures de tous les plans d'analyse sont utilisés globalement pour reconstruire la phase turbulente dans le volume afin d'obtenir les meilleures commandes à appliquer sur les miroirs déformables.

L'approche LO a été proposée en 2000 par R. Ragazzoni [Rag00, RFM00]. Elle a donné lieu depuis à de nombreux développements [DRT01, Rag01, DARF03, DTR<sup>+</sup>03, RDF<sup>+</sup>02, VVRA<sup>+</sup>03]. D. Bello [Bel03] a notamment comparé les performances de deux types d'analyse par l'étude du RSB. Le projet MAD (Multiconjugate Adaptive optics Demonstrator) devrait permettre d'effectuer une comparaison expérimentale entre l'OAMC LO et SO puisqu'une mise en œuvre des deux types d'analyse est prévue [HMF<sup>+</sup>01].

Pour ce qui nous concerne, nous traiterons le cas de l'OAMC Star Oriented. Nous allons définir les notations que nous utiliserons.

On se place sur une base de modes quelconque pour représenter la phase turbulente. Les phases sont représentées par des vecteurs de coefficients. Nous utiliserons la notation  $\phi$  pour désigner les phases dans la pupille. Pour désigner la phase dans le volume, nous utiliserons un vecteur qui se

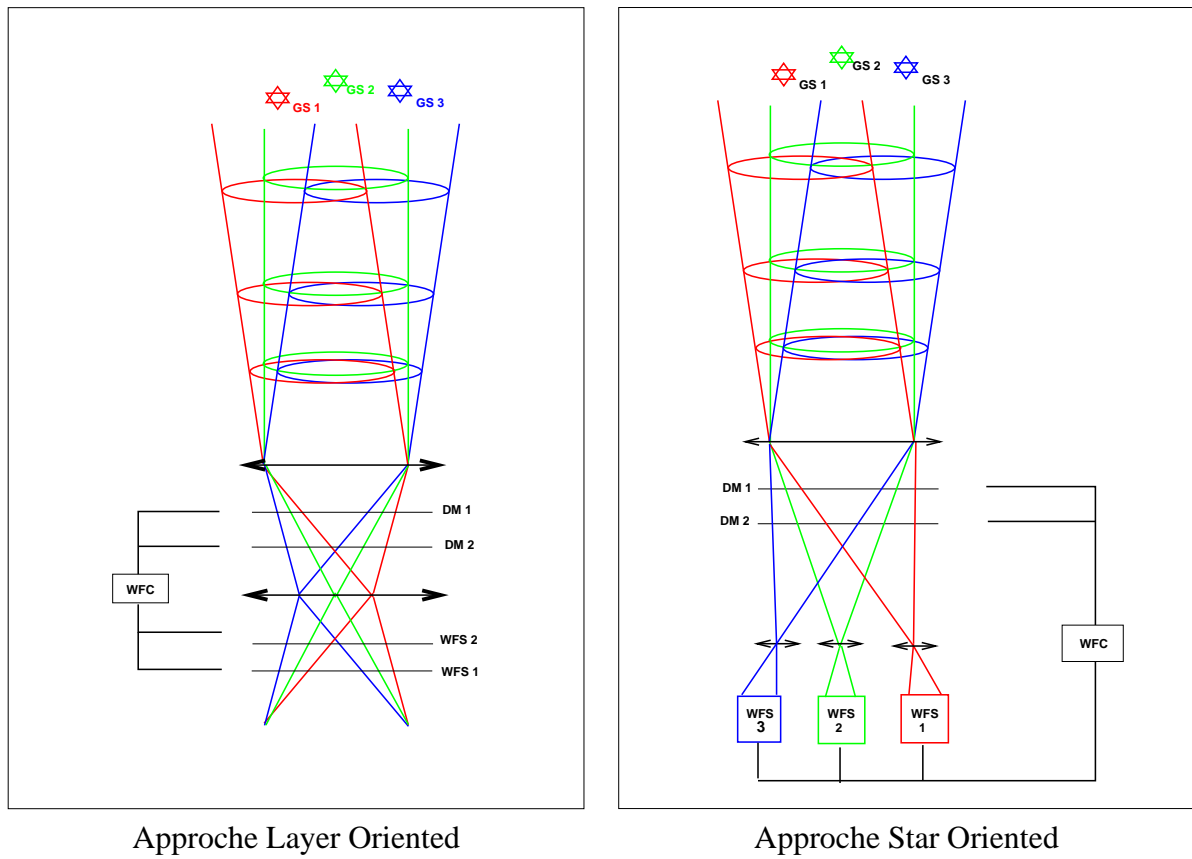


FIG. 1.15 – Schéma de principe des deux approches d'analyse du volume turbulent en OAMC, l'approche Layer Oriented et l'approche Star Oriented.

compose des phases dans toutes les couches. On désignera par  $\varphi$  la phase dans ce cas là.  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{h_0} \\ \varphi_{h_1} \\ \dots \\ \varphi_{h_n} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

où  $\varphi_{h_i}$  est le jeu de coefficients de Zernike qui représente la phase dans la couche  $i$ .

On définit ensuite la matrice  $\mathbf{M}_k^L$  qui découpe la phase turbulente dans le volume dans la direction  $k$  et qui somme sur toutes les couches. Si on fait alors l'hypothèse que la phase dans la pupille dans la direction  $k$  est égale à la somme des phases en altitude dans la même direction (hypothèse de champs proche), on peut écrire

$$\phi_k^{tur} = \mathbf{M}_k^L \varphi^{tur}. \quad (1.51)$$

On note  $\mathbf{u}$  le vecteur qui contient les tensions sur tous les miroirs déformables :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{h'_0} \\ \mathbf{u}_{h'_1} \\ \dots \\ \mathbf{u}_{h'_n} \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

où  $\mathbf{u}_{h'_i}$  est le vecteur de tensions du miroir à l'altitude  $h'_i$ . Alors, de même que précédemment, on définit  $\mathbf{M}_k^{MD}$  la matrice qui découpe la phase de correction générée par les miroirs dans la direction  $k$  et qui somme les composantes de tous les miroirs. La phase de correction dans la pupille dans la direction  $k$  s'écrit alors :

$$\phi_k^{cor} = \mathbf{M}_k^{MD} \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad (1.53)$$

où on rappelle que  $\mathbf{N}$  est la matrice définie au paragraphe 1.2.1.1 qui permet de passer de la base du miroir à la base de la phase turbulente, par exemple les zernikes.

Si on note  $\alpha = \{\alpha_i\}$  les directions d'analyse et  $\beta = \{\beta_i\}$  les directions d'objets d'intérêt, les phases turbulentes dans la pupille dans les directions  $\alpha$  sont rassemblées dans le vecteur  $\Phi_\alpha$

$$\Phi_\alpha^{tur} = \begin{pmatrix} \phi_{\alpha_0}^{tur} \\ \phi_{\alpha_1}^{tur} \\ \dots \\ \phi_{\alpha_{N_{eg}}}^{tur} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\alpha^L \varphi^{tur}, \quad (1.54)$$

où  $N_{eg}$  est le nombre d'étoiles guides. La matrice  $\mathbf{M}_\alpha^L$  contient toutes les matrices  $\mathbf{M}_{\alpha_i}^L$  :

$$\mathbf{M}_\alpha^L = \mathbf{M}_{EG}^L = \left( (\mathbf{M}_{\alpha_1}^L)^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_i}^L)^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_{N_{eg}}}^L)^T \right)^T. \quad (1.55)$$

On écrirait les mêmes équations pour les directions d'objets d'intérêt  $\beta$  ou pour les phases de correction  $\Phi^{cor}$ , et on peut alors écrire les phases résiduelles comme le vecteur  $\Phi^{res}$  qui contient les phases résiduelles dans toutes les directions  $\alpha$  comme

$$\Phi^{res} = \Phi_\alpha^{tur} - \Phi_\alpha^{cor} = \mathbf{M}_\alpha^L \varphi^{tur} - \mathbf{M}_\alpha^{MD} \mathbf{N} \mathbf{u}. \quad (1.56)$$

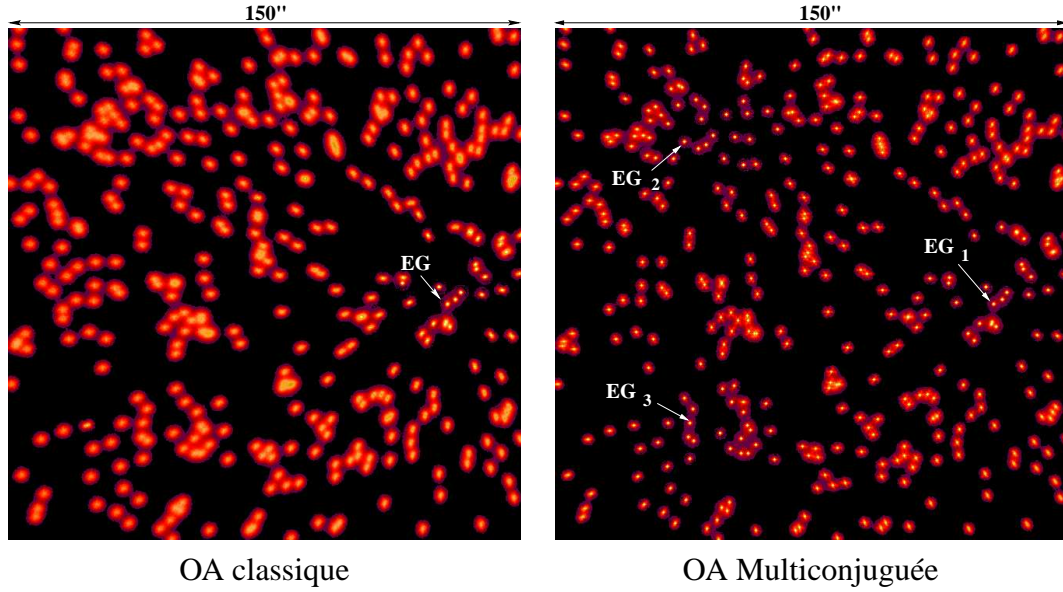


FIG. 1.16 – Simulation de champs d'étoiles corrigé en OA classique et en OA multiconjuguée. L'OAMC permet d'élargir le champ isoplanétique.

La mesure en OAMC s'écrit alors

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{M}_{\alpha}^L \boldsymbol{\varphi}^{tur} - \mathbf{D}\mathbf{M}_{\alpha}^{MD} \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{W}, \quad (1.57)$$

$\mathbf{W}$  le vecteur de bruit de mesure et

$$\mathbf{M}_{\alpha}^{MD} = \mathbf{M}_{EG}^{MD} = \left( (\mathbf{M}_{\alpha_1}^{MD})^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_i}^{MD})^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_{N_{eg}}}^{MD})^T \right)^T. \quad (1.58)$$

A partir de ces mesures, on doit remonter aux tensions à appliquer dans les miroirs pour corriger le volume de turbulence. On a présenté pour illustration en figure 1.16 un résultat de simulation qui donne une idée des images auxquelles on peut s'attendre en sortie d'un système d'OAMC.

L'une des difficultés à surmonter pour arriver à un tel résultat est l'estimation de la phase turbulente dans le volume et notamment des "modes non-vus" [FCR<sup>+</sup>01] [LL00]. Un mode non-vu est un mode de turbulence volumique dans lequel les contributions des différentes altitudes se compensent dans les directions d'analyse et pas dans les autres. La figure 1.17 représente un exemple de mode non-vu dans un cas à deux étoiles guides. Les ASO ne mesurent pas les modes non-vus qui ont pourtant un impact sur la formation des images. Plus ils contiennent d'énergie turbulente et plus cet impact est important. On peut montrer [FCM<sup>+</sup>00a] que plus les étoiles guides sont éloignées les unes des autres, plus les modes non-vus correspondent à de basses fréquences spatiales et plus il contiennent donc d'énergie.

La matrice  $(\mathbf{D}\mathbf{M}_{\alpha}^{MD} \mathbf{N})$  caractérise la sensibilité du système. Dans la base qui diagonalise la matrice  $(\mathbf{D}\mathbf{M}_{\alpha}^{MD} \mathbf{N})^T \mathbf{D}\mathbf{M}_{\alpha}^{MD} \mathbf{N}$ , les modes propres de valeur propre nulle sont les modes non-vus du système. Les modes propres associés à des valeurs propres faibles sont dits mal-vus. On parlera par la suite plus généralement de modes mal-vus pour désigner modes mal-vus et non-vus.

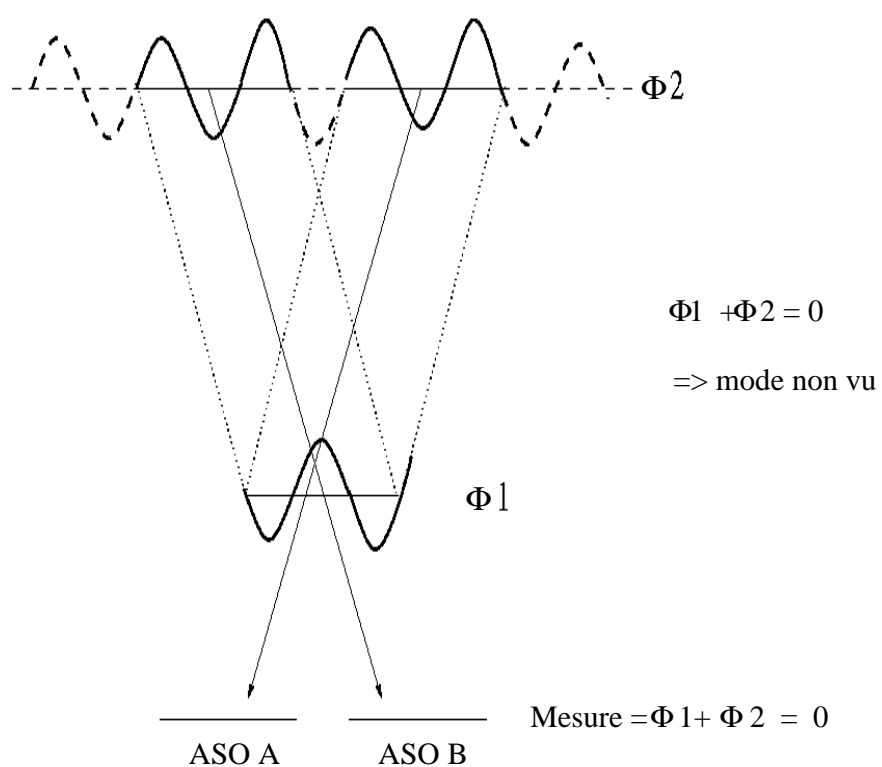


FIG. 1.17 – Illustration de la notion de mode mal vu. Les contributions des deux couches turbulentes se compensent dans les directions d'analyse, mais pas dans les autres.

### 1.2.3 Performances d'un système d'OA ou d'OAMC

On jugera la performance de systèmes d'OA classique ou multiconjugué en fonction de la variance de phase résiduelle. On peut montrer que la variance résiduelle d'une OA classique corrigeant parfaitement jusqu'au  $n^e$  ordre radial de Zernike ( $n$  supposé grand) est donnée par [Con94], [FC03].

$$\sigma_{res}^2 \simeq 0.458 (n+1)^{-\left(\frac{5}{3}\right)} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\left(\frac{5}{3}\right)}. \quad (1.59)$$

On utilise en général comme paramètres caractérisant la performance d'un système l'Energie Cohérente ou le rapport de Strehl [RS]. L'Energie Cohérente est définie comme [RMR91]

$$E_c = \exp(-\sigma_{res}^2). \quad (1.60)$$

Pour  $E_c = 1$ , la correction est parfaite, pour  $E_c = 0$ , elle est nulle. On exprime souvent l'Energie cohérente en %.

Le Rapport de Strehl est le rapport de l'intensité maximale de la FEP (Fonction d'Etalement de Point) corrigée sur l'intensité maximale de la tache de diffraction du télescope en l'absence d'aberrations (tache d'Airy)

$$RS = \frac{\max(FEP)}{\max(Airy)}. \quad (1.61)$$

On peut alors montrer que si la variance de phase résiduelle est faible,  $RS \simeq E_c$  [FC03].

## 1.3 Estimation et commande en OA et OAMC

On va rappeler ici un certain nombre de travaux précédents sur le traitement de l'estimation et de la commande en OA. On introduira tout d'abord l'Intégrateur à Gain Modal Optimisé, puis le Prédicteur Optimisé et l'estimation à variance minimale en OA classique et multiconjuguée. On présentera ensuite le formalisme d'état, l'estimation et la commande dans ce formalisme. L'objectif de tous ces travaux est toujours, dans le cadre de l'OA, la minimisation de la variance de la phase résiduelle.

Il faut noter qu'à chaque fois qu'on parlera d'optimalité sans préciser vis-à-vis de quel critère, il s'agira de l'optimalité au sens de la variance résiduelle minimale. On ne le précisera pas systématiquement afin d'alléger le discours.

### 1.3.1 Travaux précédents en commande en OA classique

#### 1.3.1.1 L'Intégrateur à Gain Modal Optimisé

L'Intégrateur à Gain Modal Optimisé (IGMO) a été introduit par Eric Gendron en 1994 [GL94a] [GL94b] [Gen95]. Il fournit les meilleurs gains pour un intégrateur découplé mode à mode, toujours au sens de la variance résiduelle minimale. Dans le formalisme fréquentiel, si le bruit et le signal sont supposés décorrélés, on peut écrire la variance résiduelle pour le mode  $i$  comme

$$\sigma_i^2 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 = \int |E_i(j\omega)|^2 |\tilde{\phi}^{tur,i}(j\omega)|^2 d\omega + \int |H_i(j\omega)|^2 |\tilde{w}_i(j\omega)|^2 d\omega, \quad (1.62)$$

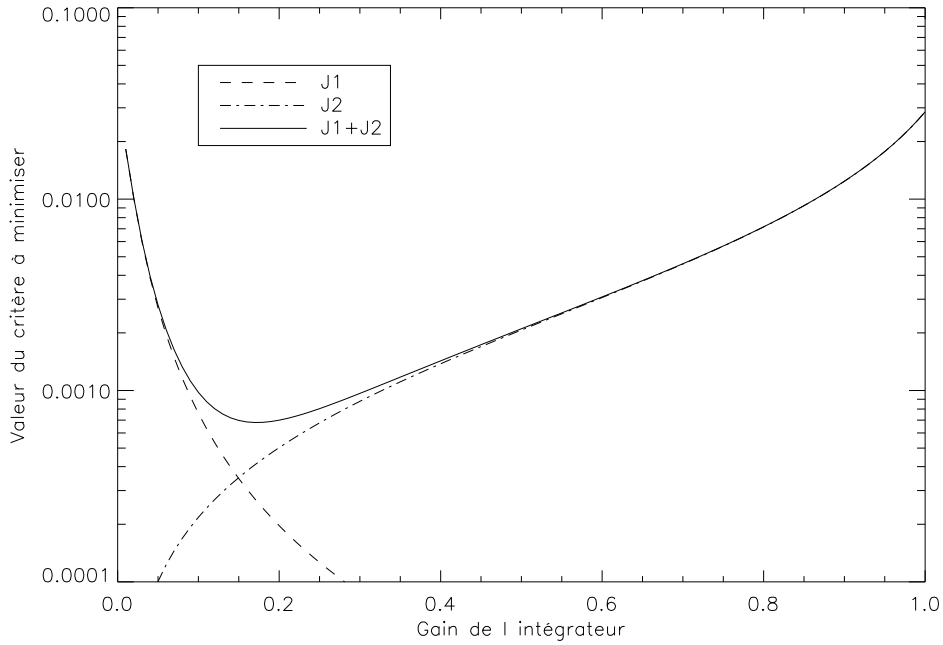


FIG. 1.18 – Illustration d’une allure typique du critère, de  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  en fonction du gain de l’intégrateur.

où  $\tilde{\phi}^{tur,i}$  et  $\tilde{w}_i$  sont les transformés de Fourier de la phase turbulente et du bruit de mesure.  $E_i$  est la fonction de transfert de réjection et  $H_i$  la fonction de la boucle fermée, elles sont toutes les deux définies dans l’espace de Laplace et dépendent du gain de l’intégrateur (cf. paragraphe 1.2). Pour un système avec deux trames de retard, le gain de l’intégrateur reste toujours compris entre 0 et 1. La limite de stabilité est atteinte pour un gain égal à 1, c’est-à-dire que pour un gain supérieur à 1, l’intégrateur diverge et pour un gain inférieur à 1 il doit converger. On montre alors que le critère atteint un minimum pour une certaine valeur du gain. En effet, plus le gain augmente et plus le bruit est propagé (le deuxième terme augmente), d’un autre côté plus le gain diminue et moins on filtre la phase turbulente (le premier terme augmente). Il existe donc une valeur optimale du gain sur chaque mode. On présente pour illustration en figure 1.18 une allure typique du critère en fonction du gain de l’intégrateur pour un mode donné. On constate qu’il y a une valeur optimale du gain sur ce mode.

Pour un grand RSB, l’approche IGMO a tendance à faire tendre le gain de l’intégrateur vers 1. En effet, le bruit qui se propage est de tout façon faible et le deuxième terme reste faible, quel que soit le gain. Ceci dit, les gains optimaux de l’intégrateur sont généralement seuillés à 0.5 pour un retard de deux trames. En effet, on a dit que le gain 1 correspond à la limite de stabilité pour un système avec deux trames de retard. Si le gain est exactement choisi égal à 1, la stabilité est très peu robuste. Pour assurer la robustesse de la stabilité, on prend généralement une “marge” dans le choix du gain et on seuille le gain optimal à 0.5 [Des98] [DMR98]. La valeur de cette marge dépend du nombre de trames de retard. On se place ici toujours dans la configuration qu’on choisira plus tard, où le système comporte un retard de deux trames. Pour des cas de fort RSB, l’approche IGMO est donc par construction “bridée”.



Pour un RSB qui tend vers 0, l'approche IGMO donne des gains qui tendent vers 0. Il est en effet de plus en plus nécessaire de filtrer le bruit en diminuant le gain.

Reste à remarquer qu'on n'a pas précisé dans quelle base on exprimait les vecteurs  $\tilde{\phi}^{tur,i}$  et  $\tilde{w}_i$ . On peut en effet choisir la base d'optimisation du gain. Une fois la base choisie, il faut connaître la DSP turbulente et le bruit propagé dans cette base. Cette question du choix de la base de modes dans laquelle on calcule les gains de l'IGMO n'est pas triviale. La base optimale dépend des caractéristiques de la turbulence et du système. Gendron donne [Gen95] des propriétés que doit vérifier la base à choisir mais ne donne pas de base optimale.

Certains auteurs ont choisi la base propre du système [DMR98], c'est-à-dire la base qui diagonalise  $\mathbf{D}_{int}^T \mathbf{D}_{int}$ , où  $\mathbf{D}_{int}$  est la matrice d'interaction introduite au paragraphe 1.2. Ce choix est argumenté en disant que les modes propres sont ceux que le système peut corriger et qu'on ne peut donc pas espérer faire mieux. D'autres choisissent la base de Kharunen-Loeve (KL) [Rou00]. Ils justifient leur choix en disant que c'est la base qui diagonalise la matrice de covariance de la turbulence et qu'elle permet de prendre en compte toute l'énergie de la turbulence. En effet, on a dit que l'IGMO était optimisé mode à mode. Cela signifie qu'il ne tient pas compte des corrélations entre modes. Dans la base de KL, ces corrélations sont nulles. De plus, c'est la base qui assure la dispersion maximale des variances entre modes et donc la meilleure correction pour un nombre fini donné de modes. D'un autre côté, la base des KL ne tient pas compte du système et il n'y a aucune assurance que le miroir déformable soit capable de corriger les modes de cette base. Il n'y a finalement pas de base qui soit optimale simultanément vis-à-vis du système et de la turbulence.

On présentera en détail la mise en œuvre de l'IGMO au paragraphe 2.7.1.3, quand on le simulera numériquement. On choisira pour ce qui nous concerne, quand nous mettrons en œuvre l'IGMO, de calculer les gains dans la base propre du système.

**1.3.1.1 Simplification du critère par C. Dessenne :** En 1998, C. Dessenne a proposé une simplification du critère  $\mathbf{J} = \sigma_i^2$  de l'approche Gendron. Constatant qu'on n'a pas accès à la phase turbulente directement, elle montre que minimiser (1.62) revient à minimiser le critère suivant [Des98] :

$$\mathbf{J}_i^{bis} = \int |E_i(j\omega)|^2 |\tilde{\phi}_{mes,i}|^2 d\omega, \quad (1.63)$$

où  $\phi_{mes,i}$  est le  $i^e$  mode de la phase mesurée  $\phi^{mes}$  qui s'écrit  $\phi^{mes} = \phi^{res} + \mathbf{W}$ . On a accès directement à cette phase, puisque c'est celle que l'on mesure. On peut estimer  $|\tilde{\phi}_{mes,i}(j\omega)|^2$  plus facilement que  $|\tilde{\phi}^{tur,i}|^2$ . L'équation (1.63) donne donc un critère plus facile à calculer. De la même façon que précédemment,  $E_i(j\omega)$  dépend du gain de l'intégrateur et on estime le gain optimal pour le mode  $i$  en minimisant  $\mathbf{J}_i^{bis}$  par rapport au gain.

### 1.3.1.2 Le Prédicteur Modal Optimisé

Le prédicteur modal optimisé (PMO) a été proposé par Caroline Dessenne en 1998 [DMR98], [Des98]. La loi de commande correspondante n'est plus cette fois un intégrateur. Mais le traitement se fait toujours mode à mode. L'objectif de ces travaux est de diminuer l'erreur temporelle due au retard entre mesure et correction. Il s'agit donc de prédire l'évolution de la phase à corriger. Elle utilise pour ce faire un correcteur correspondant à un filtre auto-régressif.

Dans l'espace de la transformation en  $z$  (l'équivalent de la transformée de Laplace pour le cas discret), le contrôleur intégrateur à gain  $g$  prend la forme

$$\mathbf{C}_{int}(z) = g / (1 - z^{-1}). \quad (1.64)$$

Dans le cas général, un contrôleur s'écrit

$$\mathbf{C}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i z^{-i}}, \quad (1.65)$$

où  $\{a_i\}_{i \in [0, q-1]}$  et  $\{b_i\}_{i \in [1, p-1]}$  sont des paramètres définissant le contrôleur et  $p$  et  $q$  définissent l'ordre du correcteur.

Caroline Dessenne définit alors un algorithme récursif pour estimer les paramètres  $\{a_i\}_{i \in [0, q-1]}$  et  $\{b_i\}_{i \in [1, p-1]}$ . Cet algorithme est basé sur une mesure en boucle ouverte de la phase turbulente avancée de deux trames (le retard présent en boucle fermée) et qui minimise la variance de phase résiduelle.

Dans cet algorithme, on déduit les nouvelles tensions à partir des phases de correction et des phases résiduelles précédentes :

$$\phi^{correction}(t) = \theta \phi(t), \quad (1.66)$$

où  $\theta$  représente le jeu de coefficients  $\{a_i\}_{i \in [0, q-1]}$  et  $\{b_i\}_{i \in [1, p-1]}$  et  $\phi$  est un vecteur qui contient les phases de correction et les phases résiduelles précédentes.

Le critère à minimiser s'écrit

$$\mathbf{J}_{pred} = \sum_t \epsilon^2(t), \quad (1.67)$$

où  $\epsilon(t)$  est :

$$\epsilon(t) = \phi_{mes}^{tur}(t) + \phi^{correction}(t). \quad (1.68)$$

$\phi_{mes}^{tur}$  est la phase turbulente estimée à partir de mesures boucle ouverte.

La minimisation de ce critère est fait sous contrainte de stabilité. Rien n'assure en effet que les paramètres trouvés par la minimisation numérique de  $\mathbf{J}_{pred}$  assureront la stabilité du système.

En pratique, C. Dessenne utilise un correcteur avec  $p = 3$  et  $q = 3$ . c'est-à-dire que (1.66) devient

$$\begin{aligned} \phi^{correction}(t) = & a_0 \phi^{correction}(t-1) + a_1 \phi^{correction}(t-2) + a_2 \phi^{correction}(t-3) \\ & + b_0 \phi^{res}(t) + b_1 \phi^{res}(t-1) + b_2 \phi^{res}(t-2). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Supposer une évolution de la phase de correction revient en fait à supposer une évolution de la phase turbulente. Mais cela n'est pas fait explicitement dans l'approche développée par C. Dessenne.

### 1.3.1.3 Estimation statique optimale en OA classique

Wallner a proposé en 1983 [Wal83] un estimateur statique de la phase turbulente optimal au sens de la variance minimale d'erreur d'estimation vis-à-vis de la commande du MD. L'estimation se fait à partir des mesures d'un analyseur et utilise les connaissances *a priori* sur les statistiques spatiale de la phase turbulente et du bruit de mesure. Il a été réinterprété et redémontré matriciellement par Thierry Fusco [Fus00]. Nous allons présenter ici cette démonstration, qui fait appelle à la dérivation matricielle, dont on donne quelques rappels en Annexe A.

Si on note  $\phi^{tur}$  la phase turbulente,  $\mathbf{D}$  la matrice qui fait passer de la base de la phase turbulente à la base des mesures et  $\mathbf{W}$  le bruit, la mesure s'écrit

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\phi^{tur} + \mathbf{W}. \quad (1.70)$$

On cherche alors les tensions  $\mathbf{u}$  qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{D}\phi^{tur} + \mathbf{W}) \quad (1.71)$$

et qui minimisent le critère

$$\mathbf{J}_{statique} = \langle \|\phi^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}\|^2 \rangle_{w,\phi}, \quad (1.72)$$

où  $\|\cdot\|^2$  représente la variance spatiale,  $\langle \cdot \rangle_{w,\phi}$  représente la moyenne sur les réalisations de bruit et de phase et  $\mathbf{N}$  est, on le rappelle, la matrice qui fait passer de l'espace des tensions du miroir à l'espace des phases.

Le critère s'écrit

$$\mathbf{J}_{statique} = \langle \|\phi^{tur} - \mathbf{NMD}\phi^{tur} + \mathbf{NMW}\|^2 \rangle \quad (1.73)$$

$$= \langle \text{Trace} \left( ((\mathbf{Id} - \mathbf{NMD})\phi^{tur} + \mathbf{NMW}) ((\mathbf{Id} - \mathbf{NMD})\phi^{tur} + \mathbf{NMW})^T \right) \rangle \quad (1.74)$$

si on se souvient qu'on définit la variance d'un vecteur colonne  $\mathbf{v}$  comme la Trace de  $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ .

$$\mathbf{J}_{statique} = \text{Trace} \left( \langle ((\mathbf{Id} - \mathbf{NMD})\phi^{tur} + \mathbf{NMW}) ((\mathbf{Id} - \mathbf{NMD})\phi^{tur} + \mathbf{NMW})^T \rangle \right) \quad (1.75)$$

puisque la Trace et la moyenne sont toutes les deux linéaires.

$$\mathbf{J}_{statique} = \text{Trace} \left( (\mathbf{Id} - \mathbf{NMD}) \langle \phi^{tur} (\phi^{tur})^T \rangle (\mathbf{Id} - \mathbf{D}^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T) \right) \quad (1.76)$$

$$+ \text{Trace} \left( \mathbf{NM} \langle \mathbf{W} (\mathbf{W})^T \rangle (\mathbf{Id} - \mathbf{D}^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}) \right) \quad (1.77)$$

$$+ \text{Trace} \left( \mathbf{NM} \langle \mathbf{W}\mathbf{W}^T \rangle \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T \right) + \text{Trace} \left( (\mathbf{Id} - \mathbf{NMD}) \langle \phi^{tur} \mathbf{W} \rangle \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T \right) \quad (1.78)$$

$$= \text{Trace} \left( \mathbf{C}_\phi - \mathbf{NMD}\mathbf{C}_\phi - \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T + \mathbf{NMD}\mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T + \mathbf{NMC}_w \mathbf{M}^T \mathbf{N}^T \right), \quad (1.79)$$

puisque le bruit de mesure et la phase turbulente sont décorrélés.  $\mathbf{C}_\phi = \langle \phi^{tur} (\phi^{tur})^T \rangle$  est la matrice de covariance de la phase turbulente et  $\mathbf{C}_w = \langle \mathbf{W}\mathbf{W}^T \rangle$  la matrice de covariance du bruit de mesure. On dérive alors l'expression obtenue par  $\mathbf{M}$  en utilisant les formules données dans l'annexe A et on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{statique}}{\partial \mathbf{M}} = -\mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T - \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T + 2\mathbf{NMD}\mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T - \mathbf{D}^T + 2\mathbf{NMC}_w \quad (1.80)$$

$$= -\mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T - \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T + 2\mathbf{NMD}\mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^T + 2\mathbf{NMC}_w \quad (1.81)$$

puisque  $\mathbf{C}_\phi$  est symétrique. On cherche le  $\mathbf{M}$  tel que  $\mathbf{J}_{statique}$  soit minimal, c'est-à-dire  $\frac{\partial \mathbf{J}_{statique}}{\partial \mathbf{M}} = 0$ . Alors

$$2\mathbf{N}\mathbf{M}_{opt}(\mathbf{D}\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w) = 2\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T \quad (1.82)$$

$$\mathbf{M}_{opt} = \mathbf{N}^+\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^+ \quad (1.83)$$

$$\mathbf{M}_{opt} = (\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^+, \quad (1.84)$$

où  $^+$  représente l'inverse généralisée.

L'estimée optimale de la phase turbulente s'écrit

$$\hat{\phi}^{tur} = \mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^+\mathbf{Y}, \quad (1.85)$$

et on peut montrer qu'elle s'écrit également de façon tout à fait équivalente

$$\hat{\phi}^{tur} = (\mathbf{D}^T\mathbf{C}_w^+\mathbf{D} + \mathbf{C}_\phi^+)^+\mathbf{D}^T\mathbf{C}_w^+\mathbf{Y}. \quad (1.86)$$

Les tensions optimales à appliquer sur le miroir sont

$$\mathbf{u} = (\mathbf{N}^T\mathbf{N})^+\mathbf{N}^T\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^+\mathbf{Y}. \quad (1.87)$$

$(\mathbf{N}^T\mathbf{N})^+\mathbf{N}^T$  est le projecteur qui permet de passer de la phase turbulente aux tensions optimales.

### 1.3.2 Estimation statique optimale en OAMC

En utilisant le même formalisme que dans le paragraphe précédent et en appliquant la même démarche au cas de l'optique adaptative multiconjuguée, Thierry Fusco a explicité l'estimateur optimal dans le cas statique pour l'OAMC [Fus00], [FCR<sup>+</sup>01]. Le critère à minimiser est la variance de l'erreur d'estimation de la phase turbulente, projetée sur la pupille du télescope puisqu'on s'intéresse à l'imagerie. En reprenant les notations de l'OAMC présentées au paragraphe 1.2.2, la mesure dans la direction  $\beta_i$  s'écrit

$$\mathbf{Y}_{\beta_i} = \mathbf{D}\phi_{\beta_i}^{tur} + \mathbf{W} = \mathbf{D}\mathbf{M}_{\beta_i}^L\varphi^{tur} + \mathbf{W}. \quad (1.88)$$

Si on cherche le meilleur estimé de la phase turbulente, le critère à minimiser est

$$\mathbf{J}_{statique,OAMC} = \sum_i \langle \|\phi_{\alpha_i}^{tur} - \hat{\phi}_{\alpha_i}^{tur}\|^2 \rangle \quad (1.89)$$

$$= \sum_{\alpha_i} \langle \|\mathbf{M}_{\alpha_i}^L\varphi^{tur} - \mathbf{M}_{\alpha_i}^L\hat{\varphi}^{tur}\|^2 \rangle. \quad (1.90)$$

On rappelle qu'on note  $\mathbf{M}_\alpha^L$  et  $\mathbf{M}_\beta^L$  les matrices qui découpent la turbulence dans les directions d'intérêt  $\alpha_i$  et dans les directions d'analyse  $\beta_i$  et projettent les différentes couches de turbulence sur

la pupille. On note également  $\phi$  les phases dans la pupille,  $\varphi$  les phases dans le volume (vecteur contenant les phases aux différentes altitudes) et  $\mathbf{Y}$  le vecteur contenant les mesures dans toutes les directions  $\beta_i$ .

Alors, en appliquant le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, on obtient l'estimateur statique optimal au sens du minimum de variance d'erreur d'estimation :

$$\hat{\varphi}_{\alpha}^{tur} = \mathbf{M}_{\text{est. opt. OAMC}} \mathbf{Y} \quad (1.91)$$

$$= \mathbf{C}_{\phi} \left( \mathbf{M}_{\beta}^L \right)^T \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_{\beta}^L \mathbf{C}_{\varphi} \left( \mathbf{M}_{\beta}^L \right)^T \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w \right)^+ \mathbf{Y}. \quad (1.92)$$

Il faut noter que  $\mathbf{C}_{\varphi}$  est la matrice de covariance de la turbulence dans le volume. C'est une matrice par blocs qui contient les matrices de covariance de la turbulence dans chaque couche (Kolmogorov) pondérée en fonction du profil de  $\mathbf{C}_n^2$ . On a présenté ici pour arriver à ce résultat une approche de type MMSE (Minimum Mean Square Error). On serait arrivé au même résultat par une approche de Maximum A Posteriori (MAP). Sous certaines conditions, on peut en effet montrer que si les variables aléatoires sont toutes gaussiennes, les deux approches sont équivalentes [FCR<sup>+</sup>01].

Dans le cas trivial où le système d'OAMC comporte autant de miroirs déformables que de couches turbulentes, cette estimateur permet dans le cas statique de corriger la phase turbulente. On parle de reconstruction tomographique. Dans le cas général, on dispose de moins de miroirs qu'il n'y a de couches turbulentes. Le résultat (1.92) n'est alors pas utilisable directement.

Dans ce cas-là, dans l'approche MAP, on utilise la notion de couches turbulentes équivalentes (paragraphe 1.2.2) pour ramener la turbulence à un nombre de couches égal au nombre de miroirs du système [FCM<sup>+</sup>99].

Dans l'approche MMSE, il faut réécrire le critère sous la forme

$$\mathbf{J}_{\text{statique, OAMC}} = \sum_i < \|\phi_{\alpha_i}^{tur} - \phi_{\alpha_i}^{cor}\|^2 > \quad (1.93)$$

$$= \sum_{\alpha_i} < \|\mathbf{M}_{\alpha_i}^L \varphi^{tur} - \mathbf{M}_{\alpha_i}^{MD} \mathbf{N} \mathbf{u}\|^2 >, \quad (1.94)$$

avec  $\mathbf{u}$  les tensions appliquées sur les miroirs. Alors, en développant (1.94) comme dans le paragraphe précédent, on trouve que les tensions optimales vis-à-vis de ce critère sont données par

$$\mathbf{u} = \left( \sum_i \left( \mathbf{M}_{\alpha_i}^{MD} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\alpha_i}^{MD} \mathbf{N} \right)^+ \left( \sum_i \left( \mathbf{M}_{\alpha_i}^{MD} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\alpha_i}^L \right) \quad (1.95)$$

$$\mathbf{C}_{\phi} \left( \mathbf{M}_{\beta}^L \right)^T \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_{\beta}^L \mathbf{C}_{\varphi} \left( \mathbf{M}_{\beta}^L \right)^T \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w \right)^+ \mathbf{Y}. \quad (1.96)$$

$$= \mathbf{P}_{[\alpha; MD]} \mathbf{M}_{\text{est. opt. OAMC}} \mathbf{Y}. \quad (1.97)$$

On reconnaît  $\mathbf{M}_{\text{est. opt. OAMC}}$  la matrice qui fournit l'estimation optimale de la phase dans le volume.  $\mathbf{P}_{[\alpha; MD]}$  est une matrice de projection. Elle projette les phases estimées dans le volume sur les miroirs du système.

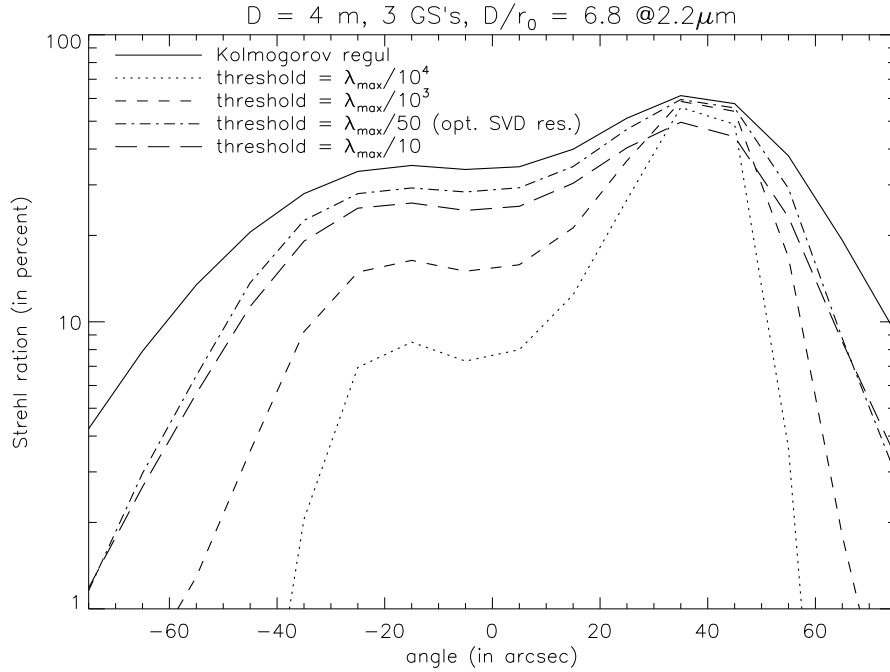


FIG. 1.19 – RS de l'estimateur optimal et de la TSVD pour différents seuils de troncature, dans le champ de vue.

On voit que la correction optimale se décompose en deux phases, l'une d'estimation optimale de la phase volumique et l'autre de projection de l'estimée sur les miroirs déformables.

T. Fusco a développé cet estimateur et a étudié ses performances par simulations numériques. Pour montrer l'intérêt de cette approche et de l'introduction des *a priori*  $\mathbf{C}_\varphi$  et  $\mathbf{C}_w$  dans l'estimateur, nous présentons en figure 1.19 un résultat obtenu lors de cette étude.

Le système comporte deux MD à 1.25 et 6.25 Km le  $\frac{D}{r_0}$  est de 6.8 et les étoiles guides sont disposées aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de 1 minute d'arc de rayon. Le RSB (défini comme au paragraphe 1.2.1.2) est de 10 sur chaque analyseur. La turbulence comporte deux couches d'égale énergie situées sur les miroirs. On est donc dans le cas de l'estimation tomographique. On présente le RS de l'estimateur optimal sur une ligne qui joint une étoile guide au centre du cercle. On présente aussi pour comparaison les résultats donnés par un estimateur de type SVD tronqué (TSVD). Dans cette approche, l'estimée est obtenue comme  $\hat{\varphi}_\alpha^{tur} = \left( \left( \mathbf{DM}_{\beta_i}^L \right)^T \mathbf{DM}_{\beta_i}^L \right)^+ \left( \mathbf{DM}_{\beta_i}^L \right)^T \mathbf{Y}$ . Comme la matrice à inverser est généralement mal conditionnée, on l'inverse par SVD tronquée. On présente les résultats pour différents seuils de troncature.

On observe qu'il existe un seuil de troncature optimal, atteint ici à  $\lambda_{max}/50$ , mais que l'approche TSVD est toujours moins bonne que l'approche optimale. L'utilisation d'*a priori* spatiaux pour l'estimation de la phase turbulente permet d'estimer correctement les modes mal vus présents dans la turbulence et qui sont filtrés par une TSVD. On a déjà présenté au paragraphe 3 la notion de mode

mal vu et on a dit que les modes en question peuvent être très énergétiques. Cela explique le gain substantiel apporté par la prise en compte de connaissances *a priori* pour leur estimation.

Cela justifie qu'on s'intéresse à l'utilisation optimale de ces connaissances *a priori* dans le cas dynamique OAMC, ce qui n'avait pas été étudié jusque-là. L'étude du cas dynamique nécessite la prise en compte de l'évolution temporelle de la turbulence et des caractéristiques temporelles du système. On a déjà présenté le système d'OA et on sait qu'il comporte notamment un retard entre mesure et correction. La complexité qu'apporte la prise en compte simultanée de toutes les connaissances spatiales et temporelles de l'évolution de la turbulence et du système justifie le choix qui a été fait d'étudier le problème dans un formalisme différent du formalisme fréquentiel utilisé par C. Dessenne ou E. Gendron. Nous allons introduire maintenant le formalisme d'état qui va nous permettre de résoudre le problème posé et d'obtenir par un filtrage de Kalman l'estimée optimale de la phase turbulente au sens de la variance résiduelle minimale dans le cas OAMC dynamique.

### 1.3.3 Modélisation d'état linéaire, filtrage de Kalman et commande

On va présenter dans ce paragraphe le formalisme d'état et l'estimation et la commande dans ce formalisme. Le modèle d'état est le système d'équation qui résume l'évolution de l'ensemble du système. Il s'écrit comme l'évolution d'un vecteur qui synthétise l'état du système à un instant : le vecteur d'état. On le présentera au paragraphe 1.3.3.1. On présentera dans le même paragraphe les notions de stabilité du système, d'observabilité, qui caractérise la capacité de reconstruire à partir des observations l'état et la commandabilité qui caractérise la capacité à le piloter. On présentera ensuite au paragraphe 1.3.3.2 l'estimation de paramètres dans le formalisme d'état et le filtre de Kalman. Au paragraphe 1.3.3.3 nous montrerons comment commander un système dans cette modélisation. En pratique, on procède consécutivement à l'estimation des variables du système (par exemple avec un filtre de Kalman) et à la commande du système en fonction des estimés obtenus. On montrera en fin de paragraphe que ce découplage de l'estimation suivi de la commande peut être fait sans perte d'optimalité.

De nombreux éléments de paragraphe, de même que sa structure, sont inspirés d'un cours d'H. F. Raynaud [Ray] que nous remercions.

#### 1.3.3.1 Le formalisme d'état linéaire, les modèles d'état à temps discret et leurs propriétés

Le comportement d'un processus physique décrit par des équations différentielles ordinaires linéaires ou des équations à temps discret linéaires peut être décrit de façon équivalente par un modèle d'état linéaire.

Un tel système dynamique prend la forme générale dans le cas continu

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_1^{(c)} \mathbf{X} + \mathbf{A}_2^{(c)} \mathbf{u} + \mathbf{V} \quad (1.98)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_3^{(c)} \mathbf{X} + \mathbf{A}_4^{(c)} \mathbf{u} + \mathbf{W} \quad (1.99)$$

où

- $\mathbf{u}$  représente les commandes, variables d'entrée,

- $\mathbf{Y}$  représente la sortie mesurée,
- $\mathbf{V}$  une perturbation, de matrice de covariance notée  $\mathbf{C}_v$
- $\mathbf{W}$  bruit de mesure, de matrice de covariance notée  $\mathbf{C}_w$

et  $\mathbf{A}_1^{(c)}$ ,  $\mathbf{A}_2^{(c)}$ ,  $\mathbf{A}_3^{(c)}$ ,  $\mathbf{A}_4^{(c)}$  sont des matrices. Le symbole  $\cdot$  représente la dérivée temporelle. Un modèle sans bruit de mesure ni perturbation est dit “déterministe”. Un modèle “stochastique” comporte les variables aléatoires  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$ . Les paramètres ne sont pas forcément constants. Quand ils le sont, on dit qu’on est dans un cas stationnaire. C’est le cas que l’on traitera par la suite.

L’équivalent en temps discret s’écrit comme une équation aux différences :

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t + \mathbf{V}_t \quad (1.100)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t + \mathbf{W}_t \quad (1.101)$$

Le vecteur  $\mathbf{Y}$  est le vecteur de mesures. C’est par lui qu’on accède à des informations sur le système pendant son évolution. Les équations (1.101) ou (1.99) décrivent le processus d’acquisition de la mesure.  $\mathbf{u}$  correspond à la commande, c’est-à-dire au paramètre grâce auquel on peut influencer l’évolution du système.

Autant les systèmes physiques évoluent souvent de façon continue et peuvent être généralement modélisés par une équation continue du type de (1.98), autant les mesures sont généralement obtenues à des temps discrets, même si les processus physiques qui les sous-tendent sont continus. Il est donc fréquent que la description d’un système soit faite en partie par un système continu et en partie par un système discret. Il est alors d’usage de discrétiser le modèle continu. Cela peut être fait par une discrétisation dite exacte. La discrétisation exacte d’une quantité continue consiste à prendre la valeur en  $tT$  de la variable continue puis celle en  $(t+1)T$  puis en  $(t+2)T$ , où  $T$  est le pas d’échantillonnage.

Entre les deux instant  $tT$  et  $(t+1)T$ , le système continu fonctionne en boucle ouverte avec  $\mathbf{u}$  constante. La valeur de  $\mathbf{X}$  à l’instant d’échantillonnage  $(t+1)T$  est donc obtenue en intégrant l’équation d’état (1.98) entre  $t$  et  $t+T$

$$\mathbf{X}((t+1)T) = \mathbf{X}_{t+1} = \exp(\mathbf{A}_1^{(c)}T) \mathbf{X}_t + \left( \int_t^{t+T} \exp(\mathbf{A}_1^{(c)}s) \mathbf{A}_2^{(c)} ds \right) \mathbf{u}_t, \quad (1.102)$$

ce qui nous donne finalement les relations de passage entre les deux représentations,

$$\mathbf{A}_1 = \exp(\mathbf{A}_1^{(c)}T), \quad (1.103)$$

$$\mathbf{A}_2 = \int_t^{t+T} \exp(\mathbf{A}_1^{(c)}s) \mathbf{A}_2^{(c)} ds. \quad (1.104)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  sont souvent utilisées dans leur forme approchée

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Id} + \mathbf{A}_1^{(c)}T \quad (1.105)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^{(c)}T. \quad (1.106)$$

Nous n’utiliserons dans la suite que des modèles d’état à temps discret, choix qui sera justifié au chapitre suivant et on va détailler ici quelques propriétés importantes pour les modèles d’état à temps discret uniquement.



**1.3.3.1.1 Stabilité du système** Il y a plusieurs façons de définir la stabilité d'un système décrit par un modèle d'état linéaire. On va donner ici deux exemples de définitions, la stabilité au sens de Lyapunov [AM79] [Hah63] et la stabilité "entrée bornée-sortie bornée". Dans la suite, quand on parlera de stabilité, on sous entendra la stabilité au sens de Lyapunov.

- La stabilité dite de Lyapunov est définie comme suit

*Un système est dit stable au sens de Lyapunov si le vecteur d'état  $\mathbf{X}_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  si on arrête de le commander ( $\mathbf{u}_t = 0, \forall t$ ).*

Pour un système à temps discret et déterministe, dont l'évolution est décrite par  $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t$ , on voit que pour  $\mathbf{u}_t = 0$ , l'équation d'évolution devient  $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t$  et donne immédiatement  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{A}_1)^t \mathbf{X}_0$ .

Alors  $\mathbf{X}_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  si et seulement si  $|\mathbf{A}_1|^t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Ceci implique que toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1$  doivent être strictement inférieures à 1 pour que le système soit stable. Si c'est le cas, on dira que  $\mathbf{A}_1$  est "une matrice de stabilité".

- On peut donner en exemple une autre définition possible de la stabilité d'un système, la stabilité dite "entrée bornée-sortie bornée" :

*Un système est dit stable au sens de la stabilité "entrée bornée-sortie bornée" si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.*

Il faut noter tout d'abord que ces deux définitions ne sont pas strictement équivalentes. La stabilité au sens de Lyapunov est plus forte et assure la stabilité "entrée bornée-sortie bornée".

De plus, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Si on définit la représentation d'état minimale comme celle dont le vecteur d'état est de plus petite dimension, alors on peut montrer que pour une représentation d'état minimale, ces deux définitions de stabilité sont équivalentes.

### Remarques

- **Rappel : calcul des valeurs propres d'une matrice**

Lorsque nous aurons besoin plus loin dans ce mémoire de déterminer si un système est stable, nous calculerons les valeurs propres d'une matrice  $\mathbf{A}_1$  en utilisant la propriété suivante :

*Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.*

On se souviendra que le polynôme caractéristique d'une matrice  $\mathbf{A}_1$  est défini comme  $\mathbf{P}(x) = \det(\mathbf{Id}.x - \mathbf{A}_1)$ . Les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1$  sont alors données par l'équation  $\mathbf{P}(x) = 0$ .

- **La stabilité d'un modèle continu**

Dans le cas continu, la stabilité au sens de Lyapunov se traduit également par une propriété sur la matrice  $\mathbf{A}_1^{(c)}$ . On peut montrer que le système est stable si toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1^{(c)}$  sont à partie réelle strictement négative.

**1.3.3.1.2 Commandabilité du système** On dit qu'un système est commandable si, quel que soit l'état initial, on peut atteindre n'importe quel point de l'espace d'état en jouant sur  $\mathbf{u}$  et en un temps fini. Cette notion définit notre capacité à contrôler l'évolution du système.

On définit la matrice de commandabilité comme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_1)^2\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_1)^3\mathbf{A}_2 & \dots & (\mathbf{A}_1)^{n-1}\mathbf{A}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

On peut alors montrer (cf. [AM90]) que le système défini par les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  est totalement commandable si et seulement si  $\mathbf{C}$  est de rang plein.

Quand le système n'est pas commandable, c'est-à-dire  $\text{rg}(\mathbf{C}) = q < n$ , on peut en général décomposer le vecteur d'état en une partie commandable  $\mathbf{X}^{(1)}$  et une autre non commandable  $\mathbf{X}^{(2)}$  :

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{t+1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(11)} & \mathbf{A}_1^{(12)} \\ 0 & \mathbf{A}_1^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_t + \mathbf{V}, \quad (1.108)$$

où  $\mathbf{A}_1^{(11)}$ ,  $\mathbf{A}_1^{(12)}$ ,  $\mathbf{A}_1^{(22)}$  sont des matrices. On voit bien dans ces équations que l'évolution de  $\mathbf{X}^{(2)}$  est indépendante des valeurs de  $\mathbf{u}$ . On comprend que  $\mathbf{X}^{(2)}$  soit non commandable.

Néanmoins, si la matrice  $\mathbf{A}_1^{(22)}$  est stable (au sens de Lyapunov), alors  $\mathbf{X}_t^{(2)}$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  puisqu'il n'y a pas de commande appliquée sur  $\mathbf{X}_t^{(2)}$ . Alors l'évolution de  $\mathbf{X}$  finit par ne plus dépendre que de la partie commandable et le système est dit "stabilisable".

On peut noter que les conditions de commandabilité s'expriment de la même façon pour un modèle à temps continu à partir de la matrice  $\mathbf{C}$ , qui prend la même forme.

**1.3.3.1.3 Observabilité du système** On dit qu'un système est observable si on est capable de reconstituer l'évolution des valeurs de  $\mathbf{X}_t$  entre  $t = 0$  et  $t = \tau$  arbitraire à partir seulement des valeurs de  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{Y}_t$  entre les mêmes instants. Cette notion définit notre capacité à connaître l'évolution du système à partir des mesures et des commandes précédentes.

De même que précédemment, on définit la matrice d'observabilité

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^2 \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^3 \\ \dots \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.109)$$

On peut alors montrer que le système défini par les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_3$  est observable si et seulement si la matrice d'observabilité  $\mathbf{O}$  est de rang plein.

De façon tout à fait similaire à ce qui a été dit dans le paragraphe consacré à la commandabilité, si un système n'est pas observable, c'est-à-dire  $\text{rg}(\mathbf{O}) = p < n$ , on peut en général décomposer  $\mathbf{X}$  en une partie observable  $\mathbf{X}^{(1)}$  et une partie non observable  $\mathbf{X}^{(2)}$

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{t+1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(11)} & 0 \\ \mathbf{A}_1^{(21)} & \mathbf{A}_1^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2^{(1)} \\ \mathbf{A}_2^{(2)} \end{pmatrix} \mathbf{u}_t \quad (1.110)$$

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{pmatrix} + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t \quad (1.111)$$

où  $\mathbf{A}_1^{(11)}$ ,  $\mathbf{A}_1^{(21)}$ ,  $\mathbf{A}_1^{(22)}$  sont des matrices différentes du paragraphe précédent. On voit dans ce système d'équations que les valeurs successives de  $\mathbf{X}^{(2)}$  n'influencent pas la mesure qui est entièrement déterminée par  $\mathbf{X}^{(1)}$  et que  $\mathbf{X}^{(1)}$  lui-même ne dépend pas des valeurs de  $\mathbf{X}^{(2)}$ . On comprend donc bien qu'on ne peut pas reconstruire  $\mathbf{X}^{(2)}$ .

De même que précédemment on peut montrer que si  $\mathbf{A}_1^{(22)}$  définit un système stable (au sens de la stabilité de Lyapunov), alors l'évolution du système finit par ne plus dépendre que de la partie observable. On dit qu'un tel système est "détectable".

On peut noter que les conditions d'observabilité s'expriment de la même façon pour un modèle à temps continu à partir de la matrice  $\mathcal{O}_c$ , qui prend la même forme que  $\mathcal{O}$  avec les matrices  $\mathbf{A}_1^{(c)}$  et  $\mathbf{A}_3^{(c)}$  au lieu de  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_3$ .

En pratique, les systèmes que l'on a à commander nécessitent d'estimer certains paramètres et d'en commander d'autres. Il est donc nécessaire d'étudier l'observabilité et la commandabilité du système pour connaître les composantes qu'on peut reconstruire à partir des observations et modifier grâce à  $\mathbf{u}$ , le tout d'un point de vue purement déterministe.

**1.3.3.1.4 Dualité observation / commande** On a pu constater une parfaite symétrie dans les développements des paragraphes 1.3.3.1.2 et 1.3.3.1.3. Dans la forme même des matrices  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  caractérisant l'observabilité et la commandabilité, on constate que  $\mathcal{O}^T$  a la même structure que  $\mathcal{C}$  (où  $^T$  symbolise la transposition matricielle). On en déduit la propriété suivante

*Dire que le couple de matrices  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3)$  est commandable est équivalent à dire que le couple de matrices  $(\mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_3^T)$  est observable.*

On parle de dualité entre observation et commande [AM90]. Tout problème d'estimation est le dual d'un problème de commande. Cette propriété permet d'expliquer la ressemblance entre les structures d'estimateur et de commande que nous présenterons plus tard.

**1.3.3.1.5 Matrice de transfert** Nous avons développé pour l'instant tout notre formalisme dans l'espace direct et non dans l'espace des fréquences comme cela est parfois fait. On a vu aux paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 que certaines méthodes de traitement de l'asservissement d'une OA utilisent le formalisme fréquentiel.

On va donc faire ici le lien entre les deux formalismes en écrivant la fonction (matricielle) de transfert d'un modèle d'état défini par ses matrices  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  et  $\mathbf{A}_4$ . On va néanmoins se restreindre

au cas d'un modèle d'état à temps discret et déterministe qui s'écrit

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \quad (1.112)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t. \quad (1.113)$$

En prenant la transformée en  $z$  (l'équivalent de la transformée de Fourier ou Laplace pour les temps discrets) de ces deux équations on obtient

$$z\check{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{A}_1 \check{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{A}_2 \check{\mathbf{u}}(z) \quad (1.114)$$

$$\check{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{A}_3 \check{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{A}_4 \check{\mathbf{u}}(z), \quad (1.115)$$

où  $\check{\cdot}$  représente la transformée en  $z$ . On obtient, après remplacement de  $\check{\mathbf{X}}(z)$  par  $(z\mathbf{Id} - \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_2$ , où  $^+$  exprime l'inverse généralisée,

$$\check{\mathbf{Y}}(z) = (\mathbf{A}_3(z\mathbf{Id} - \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_4) \check{\mathbf{u}}(z). \quad (1.116)$$

On note  $\mathbf{F}(z) = \mathbf{A}_3(z\mathbf{Id} - \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_4$  la fonction de transfert qui relie les entrées (commandes) aux sorties (mesures). Elle matérialise l'influence des commandes sur les mesures. Les fonctions de transfert sont à la base de beaucoup de propriétés du système dans le formalisme fréquentiel [Des98], [Mad99]. Mais il faut noter que la fonction de transfert présentée ici n'est pas de celle utilisé dans [Des98] ou [Mad99].

Par exemple, la stabilité du système s'exprime dans ce formalisme comme une condition sur les pôles de  $|\mathbf{F}(z)|$  qui doivent tous être à partie réelle négative. On peut vérifier, grâce à l'expression de  $\mathbf{F}(z)$  fournie dans ce paragraphe, que les conditions de stabilité données précédemment dans le formalisme d'état sont équivalentes à celles données ici dans le formalisme fréquentiel.

On a présenté dans cette partie la stabilité, l'observabilité et la commandabilité de systèmes déterministes. Il faut noter que dans le cas de systèmes stochastiques, ces notions sont définies sur la partie déterministe du modèle et de la même façon qu'on l'a fait ici. Ce sont des caractéristiques structurelles du modèle, qui ne dépendent pas de l'aspect stochastique ou non stochastique.

### 1.3.3.2 L'estimation à variance minimale

**1.3.3.2.1 L'observateur, une technique standard d'estimation de paramètres :** Un observateur est un estimateur de  $\mathbf{X}_t$  à partir des commandes et mesures précédentes. A la base de la notion d'observateur, il y a l'idée d'un modèle qui rassemble les connaissances *a priori* dont on dispose. L'estimation se fait par la comparaison de l'évolution théorique du modèle avec l'évolution du système, de sortie mesurée  $\mathbf{Y}$ .

Pour le modèle déterministe

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t, \quad (1.117)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t, \quad (1.118)$$

on écrit l'évolution du vecteur estimée comme

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t. \quad (1.119)$$

On s'intéresse maintenant à déterminer l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t$ . Si on connaissait  $\mathbf{X}_t$ , on pourrait en déduire la valeur de l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t$  et si le modèle est exact on a même  $\tilde{\mathbf{X}}_t = (\mathbf{A}_1)^t \tilde{\mathbf{X}}_0$ . Comme en général on ne connaît pas la valeur du vecteur d'état, on ne peut comparer que la sortie modèle :

$$\hat{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t \quad (1.120)$$

avec la mesure  $\mathbf{Y}_t$ . On définit  $\tilde{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_t$ .

On modifie alors en conséquence l'équation d'évolution du vecteur estimé

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t + \mathbf{L} \tilde{\mathbf{Y}}_t \quad (1.121)$$

où  $\mathbf{L}$  est appelé le "gain de l'observateur". L'erreur d'estimation devient

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3)^t \tilde{\mathbf{X}}_0. \quad (1.122)$$

Il faut tout d'abord noter que la convergence de  $\tilde{\mathbf{X}}_t$  vers 0 est assurée tant que  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$  est une matrice de stabilité. Cela signifie que tant que le processus physique est stable et que le modèle choisi pour le modéliser est lui-même stable, on peut stabiliser l'estimateur via  $\mathbf{L}$ . La vitesse de convergence de l'estimateur est égale à la vitesse de convergence de  $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3)^t$  vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . La dynamique de l'estimateur dépend donc des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$ .

Suivant la valeur choisie pour  $\mathbf{L}$  et donc pour  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$ , l'observateur peut converger plus ou moins vite. Si le couple  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$  est observable, on peut choisir la vitesse de convergence de l'observateur en fixant les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$ . Si le couple  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3)$  est détectable, on peut choisir  $\mathbf{L}$  telle que  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$  soit une matrice de stabilité.

Le choix de  $\mathbf{L}$  peut être fait soit en fixant les pôles de  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_3$  arbitrairement, soit, dans le cas stochastique, par le biais d'un critère d'optimalité.

On va voir maintenant que le filtre de Kalman est un observateur pour lequel le critère d'optimalité est la variance de l'erreur d'estimation.

**1.3.3.2.2 Le filtre de Kalman** Le filtre de Kalman [Kal60] [KB60] est un observateur à gain optimal, l'optimalité étant définie dans tout ce paragraphe au sens de la variance d'erreur d'estimation minimale. On suppose que le système est décrit par un modèle d'état linéaire stochastique de la forme

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_t + \mathbf{V}_t \quad (1.123)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t. \quad (1.124)$$

**Rappel de quelques propriétés** On rappelle deux résultats de l'estimation de vecteurs aléatoires gaussiens qui ne seront pas démontrés ici (pour plus de détails, voir [VT68] ou [Pap91]) :

#### – Propriété 1

Le meilleur estimé au sens de la variance minimale d'erreur d'estimation d'un vecteur  $\mathbf{X}$  connaissant un autre vecteur  $\mathbf{Y}$  est l'espérance de  $\mathbf{X}$  sachant  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{E}[\mathbf{X}/\mathbf{Y}]$ , et peut s'écrire

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}[\mathbf{Y}]), \quad (1.125)$$

avec  $\mathbf{C}_{xy} = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) (\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}])^T]$  et  $\mathbf{C}_y = \mathbf{E}[(\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}]) (\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}])^T]$ .  $\hat{\mathbf{X}}$  est à la fois le meilleur estimateur au sens de la variance minimale et au sens du maximum *a posteriori* de  $\mathbf{X}$ .

### – Propriété 2

Si l'on connaît la meilleure estimée de  $\mathbf{X}_t$  sachant  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_{t-1}\}$ , notée  $\hat{\mathbf{X}}^{(-)}$ , alors l'estimée optimale de  $\mathbf{X}_t$  sachant  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_t\}$  que l'on note  $\hat{\mathbf{X}}^{(+)}$  s'écrit

$$\hat{\mathbf{X}}^{(+)} = \hat{\mathbf{X}}^{(-)} + \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}) \text{Var}(\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1})^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}. \quad (1.126)$$

$\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}$  est "l'innovation", définie comme  $\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1} = \mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t/t-1}$ , où  $\hat{\mathbf{Y}}_{t/t-1}$  est la valeur estimée de  $\mathbf{Y}$  à partir de  $\hat{\mathbf{X}}^{(-)}$  et du modèle de mesure :  $\hat{\mathbf{Y}}_{t/t-1} = \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{X}}^{(-)}$ . Si l'on note  $\tilde{\mathbf{X}}^{(+)}$  et  $\tilde{\mathbf{X}}^{(-)}$  les erreurs d'estimation correspondant à  $\hat{\mathbf{X}}^{(+)}$  et  $\hat{\mathbf{X}}^{(-)}$ , on peut également montrer que

$$\text{Var}(\tilde{\mathbf{X}}^{(+)}) = \text{Var}(\tilde{\mathbf{X}}^{(-)}) - \text{Cov}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}) \text{Var}(\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1})^{-1} \text{Cov}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}^T). \quad (1.127)$$

**Obtention du filtre de Kalman** Le filtre de Kalman est l'estimateur à variance minimale qui donne  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t}$ , c'est-à-dire l'estimateur de  $\mathbf{X}_t$  à l'instant  $t$  connaissant les mesures jusqu'à  $t$ . C'est un estimateur récursif qui peut être obtenu en deux étapes.

Dans la première étape, on introduit la nouvelle mesure  $\mathbf{Y}_t$  et on déduit  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t}$  de cette mesure et de  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t-1}$ . C'est l'étape de mise à jour de l'estimateur. Dans la deuxième étape on prédit la valeur de l'estimateur à l'instant suivant  $t+1$ , c'est donc une étape dite de prédiction. On passe donc de  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t}$  à  $\hat{\mathbf{X}}_{t+1/t}$  en utilisant le modèle d'état, qui décrit l'évolution de  $\mathbf{X}_t$ .

#### Étape de mise à jour

D'après l'équation de mesure dans le modèle d'état, et puisque le bruit de mesure  $\mathbf{W}_t$  est décorrélé de  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_{t-1}\}$ , l'innovation s'écrit

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1} = \mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t/t-1} = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} = \mathbf{A}_3 \tilde{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \mathbf{W}_t. \quad (1.128)$$

Maintenant, puisque  $\mathbf{W}_t$  est aussi décorrélé de  $\{\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_t\}$ , on déduit de (1.128) les expressions

$$\text{Var}(\tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}) = \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \quad (1.129)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1}) = \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T \quad (1.130)$$

nécessaires au calcul récursif du filtre. Dans ces expressions,  $\mathbf{C}_{t/t}$  représente la matrice de covariance

de  $\tilde{\mathbf{X}}_{t/t}$ . A partir de ces dernières expressions et de la propriété 2, on obtient

$$\hat{\mathbf{X}}_{t/t} = \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1} \quad (1.131)$$

$$= \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1} \quad (1.132)$$

$$\mathbf{C}_{t/t} = \mathbf{C}_{t/t-1} - \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1}. \quad (1.133)$$

### Étape de prédiction

Sachant que  $\mathbf{V}_t$  est décorrélé de  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_t\}$ , la prédiction optimale à  $t + 1$  est donnée par

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1/t} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{t/t} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \quad (1.134)$$

$$= \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{Y}}_{t/t-1} \quad (1.135)$$

$$= \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{H}_t \left( \mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t/t-1} \right). \quad (1.136)$$

On reconnaît la structure d'un observateur à gain variable avec le gain de l'observateur

$$\mathbf{L}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{H}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1}. \quad (1.137)$$

Les équations donnant  $\mathbf{C}_{t/t-1}$  se déduisent de

$$\tilde{\mathbf{X}}_{t+1/t} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t + \mathbf{V}_t + \left( \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{t/t} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \right) = \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{X}}_{t/t} + \mathbf{V}_t. \quad (1.138)$$

On obtient donc

$$\mathbf{C}_{t+1/t} = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{t/t} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_V \quad (1.139)$$

$$= \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_V - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_{t/t-1} \mathbf{A}_1^T. \quad (1.140)$$

Cette équation est une équation de Ricatti, qui donne instant par instant la matrice de covariance d'erreur d'estimation. Résoudre cette équation revient à déterminer le filtre de Kalman adapté au modèle d'état du système. Il faut noter que les matrices  $\mathbf{C}_{t+1/t}$  ne dépendent pas de  $\mathbf{X}_t$ . Cela signifie que l'on peut très bien les calculer hors ligne, avant de fermer la boucle, ce qui permet de gagner du temps de calcul.

**Le filtre asymptotique** On peut montrer que dans le cas stationnaire qui est celui que l'on a développé ici ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$  ne dépendent pas du temps), l'équation de Ricatti converge vers une solution stationnaire solution de

$$\mathbf{C}_\infty = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_V - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_1^T. \quad (1.141)$$

Le calcul de  $\mathbf{C}_\infty$  peut être fait simplement en laissant converger l'équation de Ricatti. Il n'y a pas de méthode analytique qui permette de résoudre cette équation mais il existe des méthodes numériques efficaces.

On définit le filtre de Kalman asymptotique comme le filtre dont le gain est choisi constant et déterminé à partir de la solution de l'équation de Ricatti  $\mathbf{C}_\infty$  :

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_\infty \mathbf{A}_3^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1}. \quad (1.142)$$

On peut alors montrer que l'erreur commise en utilisant le filtre asymptotique au lieu du filtre optimal s'écrit

$$\epsilon_{t+1} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_\infty \mathbf{A}_3) \epsilon_t + (\mathbf{L}_\infty - \mathbf{L}_t) \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1}. \quad (1.143)$$

$\epsilon_t$  tend donc vers 0 de façon exponentielle et avec une vitesse qui dépend des valeurs propres de  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_\infty \mathbf{A}_3$ . Le filtre asymptotique est donc généralement une bonne façon de simplifier l'estimation de  $\mathbf{X}_t$  sans perdre en performance après le régime transitoire.

**1.3.3.2.3 Synthèse sur l'estimation à variance minimale dans le formalisme d'état** Dans le formalisme d'état, un observateur est un estimateur récursif basé sur un modèle d'état qui décrit l'évolution de l'intégralité du système et l'acquisition de mesures. A chaque itération, l'observateur compare la mesure avec une mesure estimée à partir du modèle d'état et de l'estimée de l'état du système à l'instant précédent. La différence entre les deux est pondérée par une matrice de gain (Eq.1.121).

Le filtre de Kalman est un observateur dont le gain est choisi de façon optimale (au sens de la variance minimale de l'erreur d'estimation de  $\mathbf{X}$ ) en fonction du modèle d'état. Ce gain optimal, Eq. (1.137), est variable dans le temps et son calcul nécessite de résoudre itérativement une équation de Ricatti, Eq. (1.140), ce qui peut être fait hors-ligne puisqu'elle ne dépend pas des mesures.

Pour un modèle stationnaire, il est possible de simplifier le filtre quasiment sans perdre en performance en utilisant le gain asymptotique, obtenu en laissant converger l'équation de Ricatti 1.3.3.2.2.

On trouvera plus de détails sur l'estimation à variance minimale dans [AM79], [Jas70] ou [Rad84].

### 1.3.3.3 La commande

**1.3.3.3.1 Retour d'état et retour d'état reconstruit, techniques standards de la commande** Résoudre un problème de commande dans le cas des systèmes linéaires peut se ramener au problème de déterminer une commande  $\mathbf{u}$  qui ramène l'état du système à son point d'équilibre,  $\mathbf{X} = 0$ . Si le système est stable, la solution la plus simple consiste à annuler la commande,  $\mathbf{u} = 0$ , ce qui donne alors

$$\mathbf{X}_t = \exp(\mathbf{A}_1 t) \mathbf{X}_0. \quad (1.144)$$

Cette commande a deux inconvénients, l'un de ne pas permettre de maîtriser la vitesse de convergence de  $\mathbf{X}_t$  vers 0 qui dépend de la dynamique de  $\mathbf{A}_1$  et l'autre de n'être pas applicable aux systèmes instables.

La commande dite "par retour d'état" permet d'éviter ces problèmes tout en restant simple. Elle s'écrit

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K}\mathbf{X}_t. \quad (1.145)$$

$\mathbf{K}$  est la matrice de gain du retour d'état.



Alors, pour un modèle d'état déterministe,

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \quad (1.146)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_t, \quad (1.147)$$

on obtient l'expression du vecteur d'état en fonction du temps :

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{K})^t \mathbf{X}_0. \quad (1.148)$$

Si  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{K}$  est une matrice de stabilité, alors la commande converge vers la solution. On peut de plus choisir  $\mathbf{K}$  de façon à fixer arbitrairement les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{K}$ , qui dirigent la la vitesse de convergence de l'état. Mais cela n'est possible que si le couple de matrices  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$  est parfaitement commandable. S'il est stabilisable, on peut trouver  $\mathbf{K}$  tel que  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{K}$  soit une matrice de stabilité.

Le choix de  $\mathbf{K}$  peut être fait soit en choisissant les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{K}$  soit en construisant un critère de performance  $\mathbf{J}(\mathbf{K})$  que l'on minimise. La commande LQ (Linear Quadratique) est un retour d'état à gain variable et choisi à partir d'un  $\mathbf{J}(\mathbf{K})$  quadratique.

Dans le cas général, on ne connaît pas la valeur du vecteur d'état  $\mathbf{X}_t$ . On peut alors remplacer dans l'équation (1.145)  $\mathbf{X}_t$  par une valeur estimée  $\hat{\mathbf{X}}_t$  obtenue par exemple par un observateur. La commande est alors appelée "retour d'état reconstruit".

**1.3.3.2 La commande à réponse pile** La commande dite "à réponse pile" est une commande par retour d'état exclusivement réservée aux systèmes à temps discret. Il s'agit d'un retour d'état dont le gain est obtenu en résolvant directement l'équation d'évolution du système

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \quad (1.149)$$

dans lequel on égalise  $\mathbf{X}_{t+1}$  avec l'objectif vers lequel on veut faire converger  $\mathbf{X}_t$ . On note cet objectif de commande  $\mathbf{X}_t^{obj}$ . Alors

$$\mathbf{X}_{t+1}^{obj} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t \quad (1.150)$$

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{X}_{t+1}^{obj} - (\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t \quad (1.151)$$

$$(1.152)$$

où  $^+$  représente l'inverse généralisée. Si on ne connaît pas à l'avance la valeur de l'objectif à  $t+1$ , on prend :

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{X}_t^{obj} - (\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t \quad (1.153)$$

Le gain du retour d'état est  $\mathbf{K}_{pile} = (\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1$ .

On peut également écrire la commande à réponse pile avec un objectif sur les mesures  $\mathbf{Y}_t$ .

On montre alors que la commande à réponse pile assure la convergence vers l'objectif et qu'elle est optimale dans le cas où la période d'échantillonnage du système est rapide vis-à-vis du phénomène à compenser et où on peut négliger les temps de réponse.

**Meilleure correction avec un bloqueur d'ordre 0 :** On définit une correction par bloqueur d'ordre 0 comme une correction qui impose  $\mathbf{u}_t$  constante sur un intervalle de temps  $[t : t + T]$ . On va montrer ici que pour un système dont la correction se fait par un bloqueur d'ordre 0 et où la commande est une commande à réponse pile, la meilleure correction (au sens de la variance de  $\mathbf{X}$  minimale) est la moyenne de  $\mathbf{X}_t$  sur l'intervalle  $[t : t + T]$ .

Pour un modèle d'évolution

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_t, \quad (1.154)$$

on a dit que la réponse pile était un retour d'état de gain  $(\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1$ , la commande à  $t$  vaut

$$\mathbf{u}_t = -(\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_t. \quad (1.155)$$

Si  $\mathbf{u}_t$  est constant entre  $t$  et  $t + T$ ,

$$\mathbf{u}_{[t:t+T]} = -(\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}. \quad (1.156)$$

Il s'agit ici de déterminer le  $\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}$  qui minimise la variance résiduelle. Pour  $\tau \in [t : t + T]$ ,

$$\mathbf{X}_{\tau+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_\tau - \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst} \quad (1.157)$$

$$= \mathbf{A}_1 (\mathbf{X}_\tau - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}). \quad (1.158)$$

Il s'agit donc de minimiser la variance de  $\mathbf{X}_\tau - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}$  en moyenne dans l'intervalle de temps  $[t : t + T]$ , c'est-à-dire de minimiser le critère

$$\mathbf{J} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \text{Var}(\mathbf{X}_\tau - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}) d\tau \quad (1.159)$$

$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \text{Trace} \left( (\mathbf{X}_\tau - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst})^T (\mathbf{X}_\tau - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}) \right) d\tau \quad (1.160)$$

$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \text{Trace} \left( \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_\tau^T \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst} - \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst} \mathbf{X}_\tau^T + (\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst})^T \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst} \right) d\tau. \quad (1.161)$$

En dérivant ce critère par rapport à  $\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}$  (les propriétés de la dérivation matricielle sont rappelées en Annexe A), et si l'on note  $\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^*$  la valeur de  $\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^{cst}$  qui minimise  $\mathbf{J}$ , on obtient

$$0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} 0 - \mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_\tau + 2\hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^* d\tau \hat{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}^* = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{X}_\tau d\tau. \quad (1.162)$$

On obtient le résultat qu'on annonçait en début de paragraphe, à savoir que pour un correcteur d'ordre 0 sur  $[t : t + T]$  et une commande à réponse pile, la commande  $\mathbf{u}_t$  qui minimise la variance résiduelle s'écrit

$$\mathbf{u}_{[t:t+T]} = -(\mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}, \quad (1.163)$$

avec  $\bar{\mathbf{X}}_{[t:t+T]}$  la moyenne de  $\mathbf{X}_t$  dans l'intervalle  $[t : t + T]$ .

**1.3.3.3 Les commandes LQ et LQG** La commande LQ (Linear Quadratique) est un retour d'état à gain variable avec  $\mathbf{J}(\mathbf{K})$  quadratique. La commande LQG est une commande LQ pour le cas stochastique à variables aléatoires gaussiennes.

La commande LQG revient à minimiser un critère de la forme

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \mathbf{E} \left( \sum_{t=0}^{\tau-1} (\mathbf{X}_t^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_t + \mathbf{u}_t^T \mathbf{R} \mathbf{u}_t) + \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{S} \mathbf{X}_\tau \right) \quad (1.164)$$

avec  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  choisis en fonction des objectifs que l'on se fixe.  $\mathbf{R}$  est défini positif. La commande optimale vis-à-vis de ce critère est alors donnée par

$$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{K}_t^* \mathbf{X}_t \quad (1.165)$$

$$= - \left( \left( \mathbf{R} + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \right) \mathbf{X}_t \quad (1.166)$$

où  $\mathbf{P}$  est la solution de l'équation de Ricatti

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 + \mathbf{Q} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \left( \mathbf{R} + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1. \quad (1.167)$$

Comme pour l'équation de Ricatti qui intervient dans le filtrage de Kalman, l'équation (1.167) ne fait intervenir ni  $\mathbf{X}_t$  ni  $\mathbf{Y}_t$  et est calculée hors ligne, avant de fermer la boucle.

La valeur minimale du critère, obtenue pour  $\mathbf{u}^*$ , vaut

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{u}^*) = \text{trace}(\mathbf{P} \mathbf{C}_v). \quad (1.168)$$

On a présenté ici la commande LQG pour un système stationnaire et stochastique. Si le système n'est pas stationnaire, le gain de la commande dépend du temps et il faut pour l'obtenir résoudre une équation de Ricatti rétrograde (qui donne  $\mathbf{P}_t$  en fonction de  $\mathbf{P}_{t+1}$ ). On ne donnera pas plus de détails ni plus de démonstrations sur la commande LQ ou LQG puisque nous ne l'utilisons pas dans nos travaux. En pratique, dès que la réponse du système est rapide devant l'échelle temporelle, il n'est pas nécessaire de mettre en place une commande LQG, la commande à réponse pile telle que nous l'avons présentée est optimale.

Ce paragraphe servira néanmoins à comprendre mieux la comparaison faite plus tard entre notre approche et celle d'autres auteurs. Une présentation plus complète de la commande LQG peut être trouvée en [AM90].

Il faut également noter encore une fois le grand parallélisme entre l'estimation, présentée au paragraphe 1.3.3.2, et la commande. Cela provient de la propriété de dualité notée plus haut. Les propriétés de l'observateur sont duales de celles du retour d'état, le filtre de Kalman est dual de la commande LQG.

### 1.3.3.4 Le théorème de séparation

Le théorème de séparation stochastique (aussi connu sous le nom de “principe d'équivalence à la certitude”) peut s'énoncer comme suit

La commande qui minimise le critère (1.164) est

$$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{K}_t^* \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} \quad (1.169)$$

où  $\mathbf{K}_t^*$  est le gain optimal fourni par l'équation (1.166) et  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t-1}$  l'estimée optimale fournie par filtrage de Kalman.

En d'autres termes, la solution optimale du problème est donnée en remplaçant dans la solution LQG l'état non mesuré  $\mathbf{X}$  par sa valeur estimée par filtrage de Kalman  $\hat{\mathbf{X}}$ . Ce théorème provient d'une propriété du filtrage de Kalman. La valeur estimée par filtrage de Kalman ne dépend pas de l'erreur d'estimation, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} + \tilde{\mathbf{X}}_{t/t-1} \\ \text{et } \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} &\perp \tilde{\mathbf{X}}_{t/t-1}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Cette propriété du filtre de Kalman permet de découpler dans  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  les composantes en  $\hat{\mathbf{X}}_{t/t-1}$  et en  $\tilde{\mathbf{X}}_{t/t-1}$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \left( \hat{\mathbf{X}}_{t/t-1} \right) + \mathbf{J}_2 \left( \tilde{\mathbf{X}}_{t/t-1} \right), \quad (1.171)$$

où  $\mathbf{J}_2$  ne dépend pas de  $\mathbf{u}$  et où  $\mathbf{J}_1$  peut être minimisé par une commande LQG.

Une démonstration plus complète du théorème peut être trouvée en [AM90].

Ce théorème permettra par la suite de séparer estimation et commande, c'est-à-dire de commencer par mettre en place un filtrage de Kalman pour estimer les paramètres pertinents et ensuite de s'intéresser à la meilleure commande à appliquer.



## Chapitre 2

# La commande optimale en OA Classique

Je m'intéresse dans ce chapitre au développement d'une commande optimale pour un système d'Optique Adaptative Classique boucle fermée dynamique. Il s'agit de définir et d'estimer les performances sur ce cas plus simple de l'approche par modélisation d'état, filtrage de Kalman et retour d'état que l'on appliquera ensuite à l'OAMC.

Le principe de séparation (présenté au paragraphe 1.3.3.4) est tout d'abord appliqué au paragraphe 2.1 pour montrer que les problèmes d'estimation et de commande en OA peuvent être traités séparément. Un modèle d'état est ensuite proposé et étudié dans les paragraphes 2.2 et 2.2.1 pour décrire le système d'OA classique. L'approche proposée est située par rapport aux études précédentes en OA classique au paragraphe 2.6. Au paragraphe 2.7, des simulations numériques permettent d'évaluer les performances d'un filtre de Kalman basé sur ce modèle et suivi d'une commande par retour d'état et de les comparer à une autre approche, l'intégrateur modal optimisé. Il est noté pour clore le chapitre qu'elle présente une très grande souplesse et adaptabilité. Ce dernier point est détaillé au paragraphe 2.8 notamment pour un domaine comme l'OA extrême (XAO), où l'on cherche de très hauts Rapports de Strehl.

## 2.1 Découplage des problèmes d'estimation et commande

L'objet de cette section est de montrer comment le problème du contrôle de la boucle d'asservissement d'un système d'optique adaptative peut en fait se séparer en un problème d'estimation de la phase turbulente d'une part et un problème de commande de l'autre. En effet, le théorème de séparation stochastique (aussi connu sous le nom de "principe d'équivalence à la certitude"), présenté au chapitre 1.3, permet, tant que tout est linéaire, de séparer estimation et commande [AM90].

Le problème de commande peut être présenté en premier lieu parce qu'il se simplifie beaucoup dès que l'on fait l'hypothèse que le miroir déformable a une dynamique très rapide par rapport à la période d'échantillonnage temporel de la boucle d'asservissement, hypothèse qui ne remet pas en cause la séparation estimation/commande et que nous allons étayer au paragraphe suivant. Nous pourrons ensuite, grâce à la propriété de séparation, résoudre le problème d'estimation sans tenir compte du problème de commande.

### 2.1.1 Un miroir à dynamique infinie

La dynamique d'un miroir déformable est caractérisée par sa première fréquence de résonance. Elle est typiquement de plusieurs dizaines de kHz pour un miroir à piézoélectriques de type SAM (Stacked Actuators Mirror) [Sec99] ou un miroir bimorphe. Dans le même temps, la fréquence d'échantillonnage temporel d'un système d'optique adaptative est généralement aujourd'hui de l'ordre du KHz, 500 Hz dans le cas du système NAOS, par exemple [Rou00]. On peut donc considérer que le temps de réaction du miroir déformable est négligeable devant les temps caractéristiques du système. On prend cette hypothèse dans la suite. La dynamique du miroir est considérée infiniment rapide devant le pas d'échantillonnage. La conséquence majeure est une simplification conséquente des équations qui régissent la boucle d'asservissement.

On peut noter que certains auteurs ont choisi de considérer une dynamique pour le miroir déformable [PA93]. Cela peut être utile dans certains cas spécifiques, par exemple pour tenir compte de la dynamique d'un miroir de tilt un peu trop massif ou dans un système avec un miroir secondaire adaptatif. Cela dit, dans [PA93], on peut montrer que les conditions de simulation choisies ne justifient pas ce choix et compliquent beaucoup les systèmes d'équations. Nous détaillerons l'analyse de cet article au paragraphe 2.6.3.

### 2.1.2 Estimation et projection

Plaçons-nous pour commencer dans le cas idéal où l'on connaîtrait parfaitement la phase turbulente à tous les instants. Comme on a considéré que le miroir répondait instantanément, il n'y a pas de dynamique à prendre en compte dans la commande et on peut utiliser une commande à réponse pile (*cf.* paragraphe 1.3). De plus, le système de correction est un bloqueur d'ordre 0 et on a montré au paragraphe 1.3.3.3.2 que la meilleure correction d'une quantité continue par un bloqueur d'ordre 0 est sa moyenne sur la période du bloqueur. La commande à appliquer entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + 1$  pour minimiser la variance de la phase résiduelle est alors la projection sur la base du miroir déformable de la moyenne de la phase turbulente entre  $t$  et  $t + 1$ ,  $\bar{\phi}^{tur}(t : t + 1)$ . Chercher  $\mathbf{u}_t$  constant entre  $t$  et  $t + 1$  qui minimise

$$\epsilon' = \int \left\| \phi^{tur}(t) - \phi_{cst}^{cor}(t : t + 1) \right\|^2 dt = \int \left\| \phi^{tur}(t) - \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_t \right\|^2 dt \quad (2.1)$$

revient alors à chercher  $\mathbf{u}_t$  qui minimise

$$\epsilon' = \left\| \bar{\phi}^{tur}(t : t + 1) - \phi^{cor}(t : t + 1) \right\|^2 = \left\| \bar{\phi}^{tur}(t : t + 1) - \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_t \right\|^2. \quad (2.2)$$

Le symbole  $\|\cdot\|^2$  représente la variance spatiale, dans une base orthonormale,  $\|\phi\|^2 = \sum_i \phi_i^2$ . La matrice  $\mathbf{N}$  a été définie dans le paragraphe 1.2 comme la matrice de passage entre la base de description de la phase turbulente et les déformées du miroir. Chaque colonne de  $\mathbf{N}$  est la décomposition sur la base de  $\phi^{tur}$  de la déformée d'un actionneur du miroir. La solution qui minimise (2.2) est alors connue [VT68] et s'écrit

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{P}_{MD} \bar{\phi}^{tur}(t : t + 1) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathbf{P}_{MD} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^+ (\mathbf{N})^T. \quad (2.4)$$

$\mathbf{P}_{MD}$  est l'inverse généralisée de  $\mathbf{N}$  et correspond à la projection de l'espace de la phase turbulente sur l'espace du miroir.

Considérons maintenant le cas réaliste où l'on ne connaît pas la valeur de la phase turbulente à chaque instant. On a seulement accès à une mesure de la dérivée de la phase résiduelle, comme expliqué en section 1.2. En utilisant, le théorème de séparation stochastique (ou principe d'équivalence à la certitude), présenté en section 1.3, la minimisation de (2.2) en moyenne sur la phase turbulente et le bruit de mesure ASO se décompose en deux étapes. La première étape consiste à calculer la valeur estimée  $\hat{\phi}^{tur}(t : t + 1)$  de la phase turbulente moyennée entre  $t$  et  $t + 1$  qui minimise

$$\epsilon'' = \left\langle \left\| \bar{\phi}^{tur}(t : t + 1) - \hat{\phi}^{tur}(t : t + 1) \right\|^2 \right\rangle_{\phi, noise}, \quad (2.5)$$

où  $\langle \rangle_{\phi, noise}$  représente la moyenne prise sur les tirages de phase et de bruit. Le vecteur  $\hat{\phi}^{tur}(t : t + 1)$  est l'estimée à l'instant  $t$  de  $\bar{\phi}^{tur}(t : t + 1)$  à partir de toutes les mesures disponibles à  $t$  et de toutes les connaissances *a priori* dont on dispose. La deuxième étape consiste à déterminer la tension  $\mathbf{u}_t$  qui minimise

$$\epsilon''' = \left\| \hat{\phi}^{tur}(t : t + 1) - \phi_t^{cor} \right\|^2 = \left\| \hat{\phi}^{tur}(t : t + 1) - \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_t \right\|^2 \quad (2.6)$$

pour  $\hat{\phi}^{tur}(t : t + 1)$  connu, c'est-à-dire à remplacer dans (2.2) la phase turbulente entre  $t$  et  $t + 1$  par sa valeur estimée. La commande optimale au sens de la minimisation du critère (2.2) s'écrit donc finalement en utilisant (2.3)

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{P}_{MD} \hat{\phi}^{tur}(t : t + 1). \quad (2.7)$$

Cette deuxième étape étant triviale, on peut se concentrer sur la première étape et le problème de commande optimale se ramène à un problème d'estimation de la phase turbulente  $\hat{\phi}^{tur}(t : t + 1)$ . Dans la suite de ce chapitre, on va donc concentrer notre attention sur l'estimation de  $\bar{\phi}^{tur}(t : t + 1)$  en fonction des mesures disponibles à  $t$ . Il restera sous-entendu que la commande optimale est obtenue en utilisant (2.7).

## 2.2 Description du système, connaissances *a priori*

Une chronologie type des différents événements intervenant pendant une période de temps dans un système d'optique adaptative est représentée en figure (2.1). On note  $T$  la période de l'échantillonnage temporel,  $n$  un entier positif. La valeur de  $T$  dépend des caractéristiques de la caméra de l'analyseur et du choix fait dans le compromis entre rapport signal-à-bruit et erreur temporelle. Augmenter  $T$  revient à améliorer le RSB mais à augmenter l'erreur temporelle. La phase turbulente qui arrive à l'entrée du système entre  $t = (n - 2)T$  et  $t = (n - 1)T$  est intégrée pendant toute cette période. La mesure qui en résulte est une mesure de la dérivée spatiale de la moyenne de la phase sur cet intervalle de temps. Dans l'intervalle de temps suivant, entre  $t = (n - 1)T$  et  $t = nT$ , il est procédé à la lecture



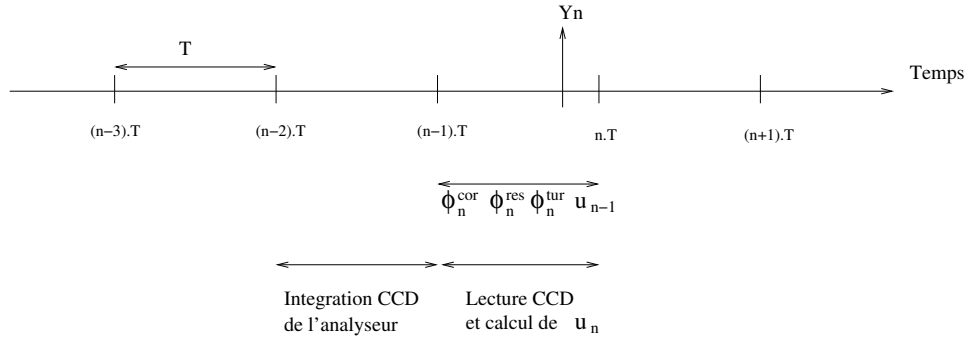


FIG. 2.1 – Chronologie des événements dans les différents intervalles de temps.  $\phi_n^{res}$ ,  $\phi_n^{tur}$  et  $\phi_n^{cor}$  sont moyennés entre  $(n-1)T$  et  $nT$  et  $u_{n-1}$  est appliqué dans le même intervalle de temps, pendant qu' $u_n$  est calculé.

de la caméra et au calcul des pentes et des tensions appliquées entre  $t = nT$  et  $t = (n+1)T$ . En général, on n'attend pas d'avoir obtenu toutes les données de la caméra pour commencer à calculer les tensions. On calcule les nouveaux  $u_n$  en parallèle, au fur et à mesure de la lecture de la caméra, de façon à limiter le retard  $\delta T$  entre l'instant où les nouvelles tensions à appliquer sont toutes disponibles et  $t = nT$ . On suppose pour l'instant que  $\delta t$  est négligeable devant  $T$ . On discutera au chapitre 2.9 du cas où cette hypothèse n'est plus vérifiée.

Il faut remarquer qu'entre l'intervalle de temps où la phase turbulente arrive sur l'analyseur,  $[(n-2)T : (n-1)T]$ , et celui où les nouvelles commandes sont appliquées,  $[nT : (n+1)T]$ , il s'est écoulé  $2T$ . On dit qu'il y a un retard de deux trames entre la mesure et la commande. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de faire une prédiction de l'évolution de la phase temporelle sur ces deux pas de temps, ce qui est détaillé au paragraphe suivant. On parle parfois pour cette configuration temporelle d'un "retard pur" d'une seule trame (la lecture de la caméra et le calcul des nouvelles tensions) et d'un retard incompressible d'une trame (temps de pose de la caméra).

### 2.2.1 Description physique du système - équations de base

Seule la moyenne de la phase dans un intervalle de temps est accessible à la mesure et la correction est constante sur ce même intervalle de temps. Dans ce contexte-là, la meilleure commande est celle qui corrige la moyenne de la phase pendant  $T$  (voir le paragraphe 1.3.3.3.2). Il est donc logique de choisir comme variable pertinente la moyenne de la phase turbulente sur un intervalle de temps  $T$ , puisque seule la moyenne intervient dans le système. Dans toute la suite, on note  $\phi_n$  la moyenne de  $\phi(t)$  entre  $(n-1)T$  et  $nT$  :

$$\phi_n = \bar{\phi}((n-1)T : nT) = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \phi(t) dt. \quad (2.8)$$

La modélisation du système passe par la description de chaque bloc constitutif d'une OA en fonction de  $\phi_n$ . Le premier bloc est celui correspondant à la turbulence atmosphérique. Les caractéristiques statistiques de la phase turbulente sont connues sous la forme de matrices de covariance

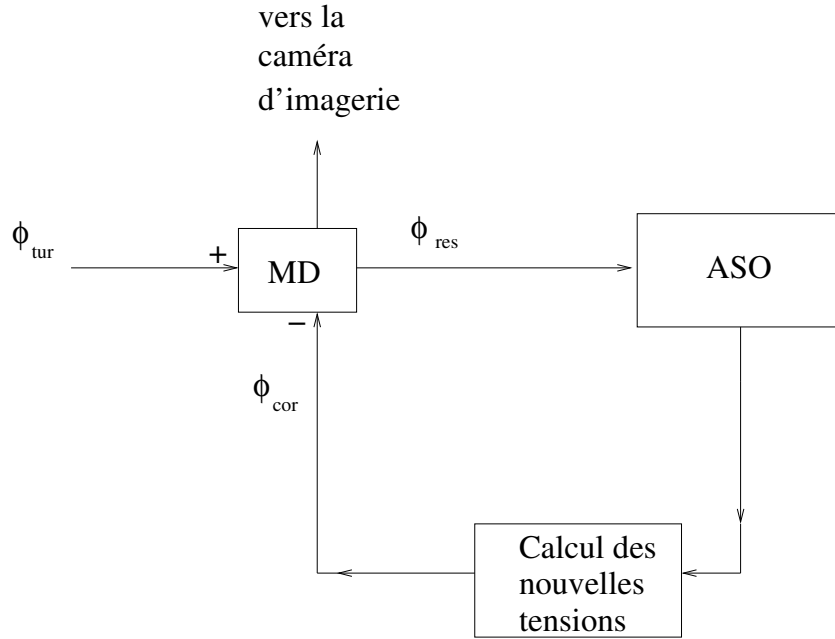


FIG. 2.2 – Schéma bloc d'un système d'OA classique boucle fermée.

spatiale et de Densité Spectrale de Puissance. Ces connaissances statistiques sont généralement exprimées sur une base modale, par exemple les zernikes. Elles ont déjà été présentées en section 1. Pour les utiliser dans le formalisme d'état, que nous avons introduit en section 1.3, il est cependant nécessaire d'exprimer toute notre connaissance *a priori* sous forme d'une équation qui donne la phase turbulente au temps  $t + 1$  en fonction de celle au temps  $t, t - 1, t - 2 \dots$

On peut toujours décrire l'évolution d'une fonction linéaire sous la forme d'une équation autorégressive, à condition de choisir un ordre adapté.

Les propriétés spatio-temporelles de la phase turbulente peuvent être décrites par une équation auto-régressive :

$$\phi_{n+1} = \mathbf{F}_0 \phi_n + \mathbf{F}_1 \phi_{n-1} + \dots + \mathbf{F}_k \phi_{n-k} + \boldsymbol{\nu}_{n+1} \quad (2.9)$$

$$= F[\phi_n, \phi_{n-1}, \dots, \phi_{n-k}] + \boldsymbol{\nu}_{n+1}, \quad (2.10)$$

où  $F$  est une fonction linéaire de  $\phi$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  un bruit blanc de matrice de covariance connue  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}}$  et  $k$  "l'ordre" du modèle. On peut donner facilement une interprétation physique de cette équation à deux termes dans le cas particulier de la turbulence monocouche de Taylor [Tay35], présentée en section 1 et dans une description zonale de la phase. Sur la pupille du télescope, on voit translater un front d'onde. Sur les bords de cette pupille, des bouts de front d'onde apparaissent et disparaissent. Le terme  $F[\phi_n, \dots, \phi_{n-k}]$ , déterministe, peut être interprété comme la translation du front d'onde sur la pupille et  $\boldsymbol{\nu}_n$ , variable aléatoire, correspond aux parties apparaissant sur le bord de la pupille. Dans une description modale de la phase et pour une turbulence plus réaliste que la turbulence gelée monocouche, l'interprétation est moins directe mais on peut tout de même dire que l'évolution de la phase contient une dimension prédictible représentée par  $F$  et une autre aléatoire représentée par

$\boldsymbol{\nu}_n$ . On peut tout de même d'ores et déjà deviner le comportement de l'équation (2.10) en fonction de paramètres comme la vitesse de vent ou le  $\frac{D}{r_0}$ . Quand la vitesse de vent augmente, la turbulence devient moins prédictible et la fonction  $F$  tend vers 0. Dans le cas limite d'une vitesse de vent infinie, les fronts d'onde sont totalement décorrélés d'un instant à l'autre,  $F = 0$  et (2.10) devient  $\phi_{n+1} = \boldsymbol{\nu}_{n+1}$ . La matrice de covariance de  $\boldsymbol{\nu}$  est alors égale à la matrice de covariance de la turbulence. Dans le cas limite inverse d'une turbulence constante dans le temps,  $\phi_{n+1} = \phi_n$ , l'évolution de  $\phi$  est totalement déterministe et  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ . Nous reviendrons plus longuement sur cette modélisation et notamment sur celle que nous avons choisie pour la suite dans la section 2.2.2.

Après avoir décrit l'évolution de la turbulence, il nous faut écrire l'équation fondamentale de l'Optique Adaptative. Entre  $(n-1)T$  et  $nT$ , la phase résiduelle  $\phi_n^{res}$  arrive sur l'analyseur.  $\phi_n^{res}$  résulte de la correction par le miroir déformable de la phase turbulente à l'instant  $nT$ ,

$$\phi_n^{res} = \phi_n^{tur} - \phi_n^{cor}, \quad (2.11)$$

où l'on note  $\phi_n^{cor}$  la phase de correction induite par la forme du miroir entre  $(n-1)T$  et  $nT$ .

Pour ce qui est du bloc miroir déformable, si l'on considère que la réponse du miroir déformable à une tension est linéaire, alors  $\phi_n^{cor}$  est directement reliée aux tensions appliquées par l'intermédiaire de la matrice de changement de base  $\mathbf{N}$ . Si les tensions appliquées à  $(n-1)T$  et maintenues constantes entre  $(n-1)T$  et  $nT$  sont notées  $\mathbf{u}_n$ , alors

$$\phi_n^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-1}. \quad (2.12)$$

On peut alors écrire la phase résiduelle comme

$$\phi_n^{res} = \phi_n^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-1}. \quad (2.13)$$

Enfin, pour le bloc correspondant à la mesure, si l'on considère un analyseur de type Shack-Hartmann la mesure est une fonction linéaire de la phase, plus un bruit, blanc temporellement. Dans l'intervalle de temps  $(n-1)T : nT$ , des imagerie se forment sur la caméra de l'analyseur qui est placée au foyer des microlentilles. La lecture des données de la caméra et le calcul des pentes sont effectués dans l'intervalle de temps suivant. La mesure correspondant à la phase  $\phi_n^{res}$  est donc disponible à l'instant  $(n+1)T$ . On note cette mesure  $\mathbf{Y}_{n+1}$ . On a alors pour  $\mathbf{Y}_n$  :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D}\phi_{n-1}^{res} + \mathbf{W}_n \quad (2.14)$$

$$= \mathbf{D}(\phi_{n-1}^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-2}) + \mathbf{W}_n. \quad (2.15)$$

$\mathbf{W}_n$  est le bruit de mesure de l'analyseur et  $\mathbf{D}$  est la matrice d'interaction entre la phase turbulente et les mesures de l'analyseur. On a déjà décrit le fonctionnement de certains analyseurs en paragraphe 1.2. Pour un Shack-Hartmann, la matrice  $\mathbf{D}$  est la matrice de changement de base entre la base de la base turbulente et la base des pentes.

C'est à partir de cette mesure  $\mathbf{Y}_n$  que sera choisie la valeur de  $\mathbf{u}_n$  et donc de  $\phi_{n+1}^{cor}$ . On comprend donc clairement que  $\phi_{n+1}^{cor}$  est estimée à partir de mesures de  $\phi_{n-1}^{tur}$ . On voit là apparaître le retard de deux trames dans l'asservissement. Ceci impose donc de prédire l'évolution de la phase turbulente sur un horizon temporel de  $2T$ .

## 2.2.2 Choix du modèle de turbulence, le modèle du premier ordre

### 2.2.2.1 Un modèle AR1

On revient ici plus en détail sur le choix du modèle de turbulence, c'est-à-dire sur le choix de la fonction linéaire  $F$  dans l'équation (2.10) et sur les caractéristiques du modèle que l'on va choisir, à savoir le modèle autorégressif du premier ordre, AR1. On va préciser comment choisir les variables d'un tel modèle et démontrer qu'il correspond à une décorrélation exponentielle. On en déduira les conséquences pour ce qui concerne la forme de la DSP et le comportement d'une OA en fonction de la Bande Passante du système. On reviendra enfin sur l'ajustement d'un modèle AR1 sur une turbulence Taylor.

Pour le modèle autorégressif de premier ordre AR1,  $k = 1$  et  $\mathbf{F}$  s'écrit comme une multiplication par une matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}_{tur} \phi_n^{tur} + \nu_{n+1}. \quad (2.16)$$

Pour un tel modèle, les degrés de liberté sont dans le choix de la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  et de la matrice de covariance de  $\nu$ . Cependant, dès qu'on impose que l'énergie globale de la turbulence se conserve on obtient la relation

$$\mathbf{C}_{\phi^{tur}} = \mathbf{A}_{tur}^T \mathbf{C}_{\phi^{tur}} \mathbf{A}_{tur} + \mathbf{C}_{\nu}, \quad (2.17)$$

et si  $\mathbf{C}_{\phi^{tur}}$ , la matrice de covariance de  $\phi_n^{tur}$ , est prise égale à la matrice de covariance de Kolmogorov [Nol76],  $\mathbf{C}_{\nu}$  s'écrit

$$\mathbf{C}_{\nu} = \mathbf{C}_{Kol} - \mathbf{A}_{tur}^T \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{A}_{tur}, \quad (2.18)$$

avec  $\mathbf{C}_{Kol}$  la matrice de covariance d'une turbulence Kolmogorov [Nol76]. Les seuls degrés de liberté qui nous restent donc pour ajuster le modèle sont les coefficients de la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$ .

On peut faire ici une petite remarque sur le choix de prendre  $\mathbf{C}_{\phi^{tur}} = \mathbf{C}_{Kol}$ . On a défini nos vecteurs de phase  $\phi_n^{tur}$  comme des moyennes sur un temps  $T$  de la phase turbulente. La matrice de covariance de  $\mathbf{C}_{\phi^{tur}}$  n'est alors pas strictement égale à  $\mathbf{C}_{Kol}$ . De même la DSP de  $\phi_n^{tur}$  n'est pas exactement égale à la DSP turbulente de type Taylor. Mais en réalité, la période  $T$  du système est très petite devant le temps caractéristique d'évolution de la turbulence. Dans les simulations que nous ferons, la fréquence d'échantillonnage est de l'ordre de 100 Hz et la fréquence de coupure de la DSP, qui caractérise l'évolution de la turbulence, de l'ordre de 8 Hz. Pour ces ordres de grandeurs-là, la convolution par une fenêtre de taille  $T$ , équivalente dans le plan des fréquences à une multiplication par un sinus cardinal qui s'annule à  $2f_{ech}$ , est négligeable. C'est la raison pour laquelle on a conservé  $\mathbf{C}_{Kol}$  comme matrice de covariance de la phase turbulente.

### 2.2.2.2 La décorrélation temporelle d'un modèle AR1

Pour le mode turbulent  $i$ , l'équation (2.16) devient

$$\phi_{n+1}^{tur,i} = \sum_j \mathbf{A}_{tur}(i, j) \phi_n^{tur,j} + \nu_{n+1}^{(i)}, \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{A}_{tur}(i, j)$  est le  $j^e$  élément de la  $i^e$  ligne de  $\mathbf{A}_{tur}$ . On va dans toute la suite choisir la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  diagonale. Cela revient à dire que l'on néglige les interspectres, c'est-à-dire les corrélations

temporelles croisées mode à mode :  $E[\phi_n^{tur,j_1} \phi_{n+m}^{tur,j_2}] = 0, \forall j_2 \neq j_1 \text{ et } m \neq 0$ . Alors (2.19) devient

$$\phi_{n+1}^{tur,i} = a_i \phi_n^{tur,i} + \nu_{n+1}^{(i)}, \quad (2.20)$$

avec  $a_i = \mathbf{A}_{tur}(i, i)$ . Alors

$$\phi_{n+2}^{tur,i} = (a_i)^2 \phi_n^{tur,i} + a_i \nu_{n+1}^{(i)} + \nu_{n+2}^{(i)} \quad (2.21)$$

et finalement

$$\phi_{n+p}^{tur,i} = (a_i)^p \phi_n^{tur,i} + (a_i)^{p-1} \nu_{n+1}^{(i)} + (a_i)^{p-2} \nu_{n+2}^{(i)} \dots + a_i \nu_{n+p-1}^{(i)} + \nu_{n+p}^{(i)}. \quad (2.22)$$

D'où, si  $\nu^{(i)}$  est temporellement blanc et décorrélé de  $\phi^{tur,i}$ , l'expression de la corrélation temporelle de  $\phi^{tur,i}$  est donnée par  $\xi^{(i)}(p) = \langle \phi_{n+p}^{tur,i} \phi_n^{tur,i} \rangle_n$ , soit

$$\xi^{(i)}(p) = (a_i)^p \langle \phi_n^{tur,i} \phi_n^{tur,i} \rangle_n = (a_i)^p \sigma_{tur,i}^2, \quad (2.23)$$

avec  $\sigma_{tur,i}^2$  la variance turbulente du  $i^e$  mode.

Un tel modèle d'évolution de la phase turbulente assure donc une décorrélation temporelle exponentielle. On a représenté en figure 2.3 la décorrélation temporelle du tilt pour un tel modèle pour différentes valeurs du paramètre  $a_1$  et la décorrélation temporelle d'une turbulence Taylor de vitesse de vent  $V/D = 2$  Hz à une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. La décorrélation d'une turbulence Taylor est en fait plus gaussienne qu'exponentielle. On a obtenu la décorrélation temporelle de la turbulence Taylor par transformée de Fourier de la DSP, calculée à partir de la loi asymptotique donnée dans [Con94] et [CRM95], d'une telle turbulence.

### 2.2.2.3 Densité Spectrale de Puissance d'un modèle AR1

Dans le plan de Fourier, la DSP d'une turbulence Taylor après la fréquence de coupure décroît comme une puissance de  $-\frac{17}{3}$  (voir section 1). La transformée de Fourier d'une exponentielle décroissante présente aussi une fréquence de coupure  $f_c$  mais elle est une puissance de  $-2$  après  $f_c$ . On a représenté pour comparaison en figure 2.4 les DSP du tilt d'une turbulence AR1 et d'une turbulence Taylor pour un  $\frac{D}{r_0}$ , une vitesse de vent et un  $a_1$  donnés. Cette figure n'a qu'une valeur qualitative et illustrative. La pente après fréquence de coupure du modèle AR1 est plus faible que celle d'une turbulence Taylor d'un facteur presque 3 mais l'énergie totale est la même dans les deux cas, ce qui signifie que l'AR1 contient plus d'énergie dans les hautes fréquences temporelles que la turbulence de type Taylor, ce qu'on voit en figure 2.4.

### 2.2.2.4 Conséquences sur l'erreur temporelle

La conséquence première est qu'il est plus difficile de faire une prédiction dans le cas AR1 que dans le cas Taylor et que l'erreur temporelle y est plus importante. On peut, pour s'en convaincre, calculer l'erreur temporelle de tilt d'un intégrateur à gain fixe 0.5 dans les deux cas. Si l'on considère que la DSP turbulente présente une fréquence de coupure  $f_c$  et qu'elle est en puissance de  $l$  avant

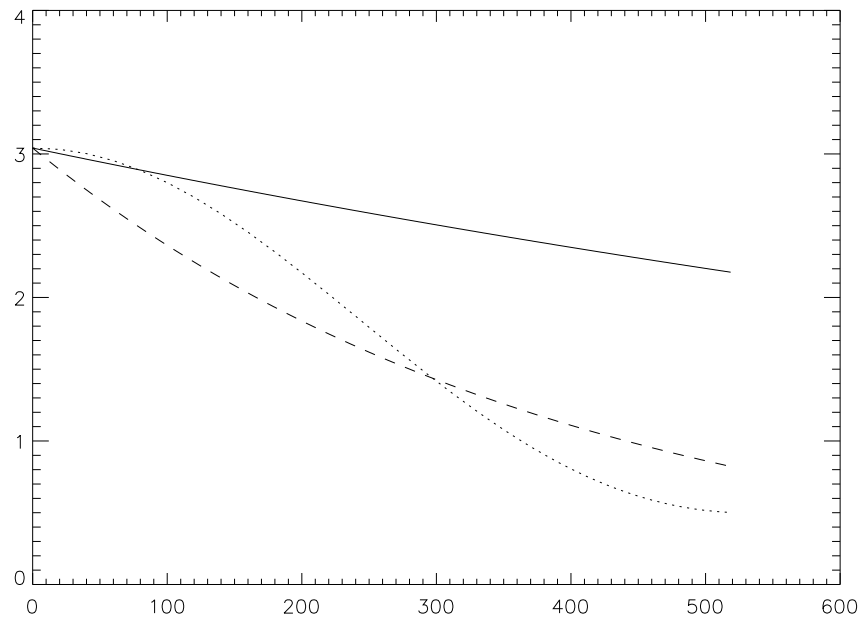


FIG. 2.3 – Autocorrélation temporelle du tilt pour une turbulence Taylor [pointillés]  $V/D = 2$  Hz, pour un modèle AR1 avec  $a_1 = 0.9974$  [trait discontinu] ou avec  $a_1 = 0.99935$  [trait plein]. L'abscisse correspond au temps, en nombre de périodes  $T$  pour  $freq_{ech} = 100$  Hz.

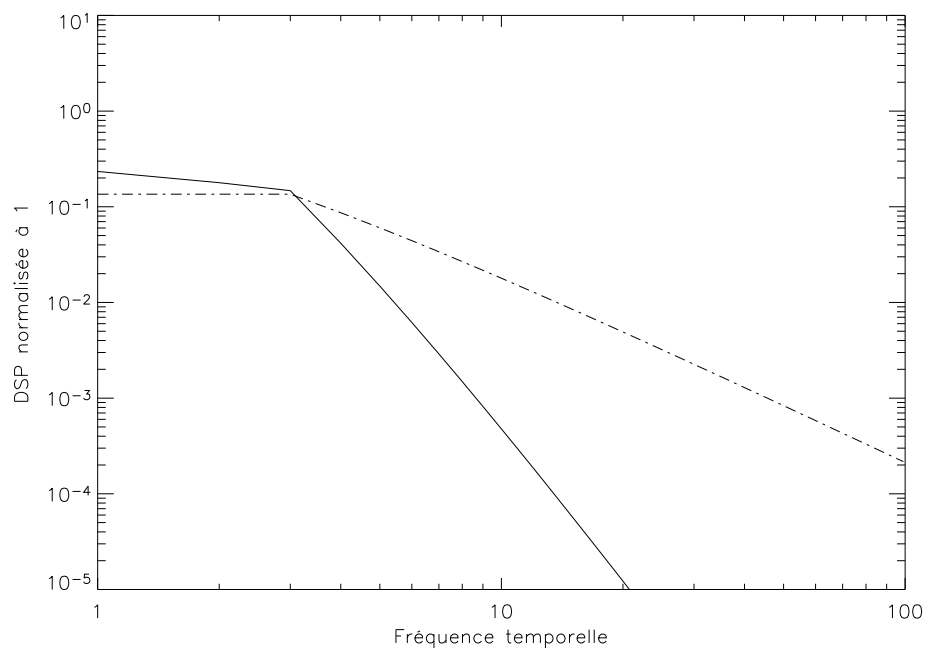


FIG. 2.4 – Illustration qualitative de la forme des DSP de la turbulence de type Taylor (DSP en  $-17/3$  après la fréquence de coupure) [trait plein] et de type AR1 (DSP en  $-2$  après la fréquence de coupure) [tirets-points].

$f_c$  et en puissance de  $p$  après, alors on peut montrer que l'erreur temporelle du tilt est donnée pour  $BP > f_c$  par [Fus03] :

$$\sigma_{err,tilt}^2 \simeq \sigma_{tilt}^2 \left( \frac{f_c}{BP} \right)^2 \left( \frac{\frac{k}{3(k-3)} - \frac{2}{(k-1)(k-3)} \left( \frac{f_c}{BP} \right)^{k-3}}{1 + \frac{1}{k-1}} \right) \quad (2.24)$$

avec  $BP$  la bande passante du système, définie comme la fréquence à laquelle s'annule la fonction de transfert de la boucle fermée (déjà présentée au chapitre 1).  $\sigma_{tilt}^2$  est la variance du tilt.

Pour le cas Taylor, on obtient, si on considère  $BP > f_c$ ,  $\sigma_{err,tilt}^2$  proportionnel à  $\sigma_{tilt}^2 \left( \frac{f_c}{BP} \right)^2$ . Dans le cas d'une DSP en  $-2$  après la fréquence de coupure, l'expression (2.24) donne cette fois, toujours avec l'hypothèse  $BP > f_c$ ,  $\sigma_{err,tilt}^2$  proportionnel à  $\sigma_{tilt}^2 \left( \frac{f_c}{BP} \right)$ . Le comportement d'une Optique Adaptative est donc différent face à une turbulence AR1 et face à une turbulence Taylor. Pour une fréquence de coupure fixée, si l'on souhaite diminuer l'erreur temporelle d'un facteur  $m$  il faut, avec une turbulence Taylor, augmenter  $BP$  d'un facteur  $\sqrt{m}$  et avec une turbulence AR1, augmenter  $BP$  d'un facteur  $m$ .

### 2.2.2.5 Le modèle AR1 choisi

Il reste, pour définir complètement le modèle AR1 utilisé, à choisir les coefficients de la diagonale de la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  dans l'équation (2.16). D'après l'équation (2.23), le coefficient  $a_i$  peut être relié directement à la décorrélation temporelle du mode  $i$ . Il s'agit de choisir des coefficients  $a_i$  et donc un modèle AR1 qui soient réaliste.

On peut tout d'abord penser à ajuster un temps caractéristique de corrélation du modèle AR1. Si l'on définit par exemple le temps caractéristique de décorrélation du mode  $i$ ,  $\tau_c^{i,AR1} = p_c^{i,AR1} T$ , comme le temps de corrélation à  $\frac{1}{e}$  du maximum, alors  $\tau_c^{i,AR1}$  vérifie

$$(a_i)^{p_c^{i,AR1}} \sigma_{tur,i}^2 = \frac{1}{e} \sigma_{tur,i}^2, \quad (2.25)$$

puisque le maximum de  $\xi^{(i)}(p)$  est obtenu pour  $p = 0$  avec  $\xi^{(i)}(0) = \sigma_{tur,i}^2$  (cf. équation (2.23)). Alors

$$\exp(p_c^{i,AR1} \ln a_i) = \exp(-1) \quad (2.26)$$

qui devient, en passant au logarithme népérien,

$$\tau_c^{i,AR1} = -\frac{T}{\ln a_i}. \quad (2.27)$$

On veut ajuster le modèle AR1 pour qu'il ressemble à une turbulence Taylor à partir de ce paramètre. On choisit de définir le temps caractéristique de corrélation d'une turbulence Taylor comme l'inverse de la fréquence de coupure  $f_c^{(r)}$  de la DSP de l'ordre radial  $r$  de la phase turbulente. Alors, si l'on considère  $f_c^{(r)} \simeq 0.3(r+1)V/D$  [Con94], en simplifiant (2.27) et en passant à l'exponentielle

$$a^{(r)} = \exp(-T f_c^{(r)}) \simeq \exp(-0.3(r+1)V/D), \quad (2.28)$$



où il est rappelé que  $r$  correspond à l'ordre radial du mode turbulent. Les  $a_i$  sont donc décroissants par palier de même ordre radial. La loi de décroissance est donnée par (2.28). Reste à choisir le premier coefficient,  $a_1$ . De façon à le choisir de façon réaliste, on définira une vitesse de vent équivalent au paragraphe 2.7.1 et on choisira le  $a_1$  équivalent à un  $V/D$  de 2 Hz.

On a choisi d'utiliser dans la suite les  $a_i$  donnés par la relation (2.28). Les performances du filtre de Kalman associé au modèle AR1 seront étudiées en détail au paragraphe 2.7.1 dans le cas où la phase a été générée avec le même modèle. Ce cas permet de s'affranchir des erreurs de modèle sur la phase. Dans le cas plus réaliste où la phase est générée comme une turbulence Taylor, l'utilisation d'un modèle AR1 pour le filtrage n'induit quasiment pas de perte de performance (*cf.* paragraphe 2.7.2.3).

Il s'agissait dans ce chapitre de choisir un modèle avec lequel simuler la turbulence et qui soit donc autant que possible réaliste et représentatif. On peut noter toutefois que cette construction est quelque peu arbitraire. On aurait pu choisir différemment les  $a_i$ , par exemple en égalisant non pas les temps caractéristiques de décorrélation  $\tau_c^{i,AR1} = \tau_c^{i,Taylor}$  mais en égalisant la décorrélation elle-même à  $p = 2$ ,  $\xi^{i,AR1}(2) = \xi^{i,Taylor}(2)$ .

### 2.2.2.6 Ajustement du modèle AR1 sur une turbulence Taylor

La question de l'ajustement du modèle AR1 sur une turbulence Taylor sera évoquée plus tard, où nous montrerons que définir une vitesse de vent équivalent suffit pour obtenir avec notre système de très bonnes performances (paragraphe 2.7.2). Mais elle ne sera pas étudiée en détail ici.

Néanmoins, pour rapprocher la modélisation Auto-Régressive d'une turbulence Taylor, il suffirait d'augmenter l'ordre du modèle AR, donc le nombre de degrés de liberté, et de faire tendre la courbe de décorrélation temporelle du modèle vers celle de la turbulence Taylor en jouant sur ces degrés de liberté supplémentaires. Mais avoir beaucoup de degrés de liberté nécessite de les ajuster, ce qui augmente la complexité. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi pour simplifier d'utiliser un modèle AR1.

## 2.3 Choix du vecteur d'état, équations d'état

On a présenté au paragraphe 1.3 le formalisme d'état, la notion de vecteur d'état, de modèle d'état et la théorie de l'estimation linéaire optimale. On va maintenant appliquer cette théorie au problème qui nous intéresse, en commençant par choisir un modèle d'état adapté à l'optimisation de la correction d'un système d'OA.

On a développé au paragraphe 1.3 la théorie du filtrage linéaire optimal de Kalman. Il nous faut, pour utiliser ces connaissances, commencer par exprimer notre problème dans le formalisme d'état et donc choisir un vecteur d'état  $\mathbf{X}_n$  qui permette de décrire le système sous la forme de deux équations linéaires :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}_{1n}\mathbf{X}_n + \mathbf{A}_{2n}\mathbf{u}_n + \mathbf{V}_n, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}_{3n}\mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n, \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{V}_n$  est un bruit blanc de matrice de covariance  $\mathbf{C}_v$  et  $\mathbf{W}_n$  un bruit blanc de matrice de covariance  $\mathbf{C}_w$ . Les équations écrites au paragraphe 2.2 sont stationnaires. C'est-à-dire que le système et les

statistiques des variables aléatoires sont invariants dans le temps. On peut donc décrire le système avec un modèle stationnaire,  $\mathbf{A}_{1n} = \mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_{2n} = \mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_{3n} = \mathbf{A}_3$ .

En réalité, la turbulence n'est pas parfaitement stationnaire. Mais l'hypothèse de stationnarité n'enlève pas de généralité à la méthode. Les caractéristiques de la turbulence (vitesse du vent,  $r_0, \dots$ ) évoluent dans le temps mais à l'échelle de la minute, ce qui est très grand devant  $T$  (de l'ordre de la milliseconde...). Il faudrait simplement, dans un système réel, réajuster régulièrement les matrices du modèle. C'est similaire à ce qui est fait actuellement dans certains systèmes (voir par exemple [Rou00]), où la matrice de commande est recalculée régulièrement pour compenser la non-stationnarité de la turbulence.

### 2.3.1 Une première forme, généralisable à l'OAMC

Le choix du vecteur d'état doit être fait en tenant compte des équations fondamentales décrivant le système, de façon à pouvoir décrire tout le système avec les équations (2.29) et (2.30). On doit pouvoir écrire, à partir de  $\mathbf{X}_n$ , l'évolution de la phase turbulente, Eq. (2.16), l'équation de la mesure (2.30) et  $\mathbf{X}_n$  doit contenir les paramètres nécessaires pour le calcul de  $\mathbf{u}_n$ . Il est donc nécessaire d'introduire  $\phi_{n+1}^{tur}$  dans le vecteur d'état puisque c'est à partir de lui que  $\mathbf{u}_n$  est calculé. On voit à partir de l'équation (2.15) que, pour pouvoir écrire la mesure, il faut introduire dans  $\mathbf{X}_n$  la phase turbulente moyennée dans l'intervalle  $[n-2 : n-1]$ ,  $\phi_{n-1}^{tur}$  et le vecteur des tensions dans le même intervalle de temps  $\mathbf{u}_{n-2}$ . Finalement, pour écrire dans l'équation (2.29),  $\mathbf{X}_{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{X}_n$ , il faut introduire aussi  $\mathbf{u}_{n-1}$  qui permet de garder en mémoire les valeurs des tensions (comme dans un registre). De la même façon, pour avoir accès à  $\phi_{n-1}^{tur}$ , il faut mettre en mémoire les phases dans un registre. On a donc, à ce stade, un vecteur d'état composé des vecteurs  $\phi_{n+1}^{tur}$ ,  $\phi_n^{tur}$ ,  $\phi_{n-1}^{tur}$ ,  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$ . On peut alors remarquer que ces variables sont déjà suffisantes pour décrire l'évolution de la phase turbulente selon un modèle AR1, celui choisi, puisqu'on n'a besoin dans le vecteur d'état que d'un seul instant temporel de  $\phi^{tur}$ .

Le vecteur d'état s'écrit donc

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

et les équations (2.29) et (2.30) deviennent alors

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & -\mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n. \quad (2.33)$$

On peut remarquer que pour utiliser un modèle AR2 pour décrire l'évolution de la phase turbulente, on aurait besoin de deux instants de phase turbulente dans le vecteur d'état et de trois pour

un AR3. Notre vecteur d'état comprend déjà trois instant, ce qui signifie qu'on pourrait sans changer de vecteur d'état et sans augmenter la taille des matrices utiliser une description AR3 de la phase turbulente. L'équation (2.32) deviendrait alors, pour une description de la phase par un AR2 :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & \mathbf{B}_{tur} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n. \quad (2.34)$$

et pour une description de la phase turbulente par un AR3 :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & \mathbf{B}_{tur} & \mathbf{C}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n. \quad (2.35)$$

Passer à un modèle AR2 ou AR3 ne nécessiterait pas de changer la taille des matrices du modèle.

Une fois choisis le vecteur d'état et le modèle, la théorie de l'estimation linéaire optimale va nous donner le meilleur estimé de la phase turbulente, au sens du critère (2.2) et donc la meilleure commande définie en équation (2.7). Cette équation (2.7) est un retour d'état. C'est même plus précisément une commande à réponse pile.

C'est le modèle AR1 présenté ici qui sera utilisé par la suite, et notamment pour les simulations numériques. Il n'est néanmoins pas le seul possible. On pourrait écrire un système d'équations équivalentes avec moins de paramètres dans le vecteur d'état. Cela dit, un modèle plus réduit ne serait pas généralisable à l'OAMC. On va présenter dans le paragraphe suivant un modèle adapté seulement à l'OA classique mais à partir d'un vecteur d'état plus petit.

### 2.3.2 Une deuxième forme plus compacte mais limitée à l'OA classique

Afin d'obtenir une forme de modèle qui soit plus compacte, on va utiliser l'équation (2.14) au lieu de l'équation (2.15). A partir de l'équation (2.14) et en se souvenant, équation (2.7), que  $\mathbf{u}_n$  est calculé à partir de  $\phi_{n+1}^{tur}$ , on peut déduire que le vecteur d'état  $\mathbf{X}_n$  doit contenir les variables  $\phi_{n+1}^{tur}$  et  $\phi_{n-1}^{res}$ . De plus, pour pouvoir écrire l'équation (2.29) on va enregistrer  $\phi_n^{res}$  comme un registre à décalage, et utiliser (2.13) pour écrire  $\phi_{n+1}^{res}$ , en fonction de  $\phi_{n+1}^{tur}$  et  $\mathbf{u}_n$ . Finalement, on obtient :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{res} \\ \phi_{n-1}^{res} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

et

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{N} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n. \quad (2.38)$$

En appliquant un filtrage de Kalman de la même façon que présenté au paragraphe 1.3, on peut estimer  $\mathbf{X}_n$  et donc obtenir  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$  optimal, dont on déduit le meilleur  $\mathbf{u}_n$ . Cela illustre que la représentation d'état d'un système n'est pas unique.

L'objectif de ces travaux est d'appliquer le filtre de Kalman à l'Optique Adaptative Multiconjuguée. Autant dans le cas classique la phase turbulente, le miroir, la phase résiduelle sont toutes dans la pupille, autant en OAMC, la phase turbulente et les miroirs sont dans le volume alors que la phase résiduelle reste dans la pupille. Cette dernière n'est pas facilement définissable dans le volume puisque les altitudes de couches turbulentes et de miroirs sont *a priori* différentes. Alors l'information contenue dans la phase turbulente et la phase résiduelle dans les directions d'analyse est insuffisante pour estimer la phase hors axe. On a besoin d'un modèle qui soit, lui, généralisable à l'OAMC, comme le premier modèle proposé qui sera utilisé par la suite.

## 2.4 Propriétés du modèle d'état

Dans la suite, on utilise le premier modèle d'état AR1 présenté, généralisable à l'OAMC. Il reste néanmoins à vérifier si ce modèle se comporte bien en terme de stabilité, d'observabilité et de commandabilité.

### 2.4.1 Stabilité du système

La stabilité du modèle assure que la commande basée sur ce modèle ne divergera pas. On a déjà présenté cette notion en 1.3 et introduit sa définition. On rappelle qu'un système est stable si les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1$  sont toutes strictement comprises entre  $-1$  et  $1$ . Le calcul du polynôme caractéristique (dont la définition est rappelée au paragraphe 1.3.3.1.1) de  $\mathbf{A}_1$  donne dans notre cas

$$\det(x\mathbf{Id} - \mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} x\mathbf{Id} - \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Id} & x\mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{Id} & x\mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\mathbf{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Id & x\mathbf{Id} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$= \prod (x - a_i) x^{4m}, \quad (2.40)$$

avec  $a_i$  les éléments diagonaux de  $\mathbf{A}_{tur}$  et  $m$  le nombre d'éléments de  $\mathbf{X}_n$ . Les valeurs propres de  $\mathbf{A}_1$  sont les racines du polynôme caractéristique, à savoir  $0$  et les  $a_i$ . Le système est donc stable tant que les  $a_i$  sont tous inférieurs à  $1$  en module. Les coefficients que nous choisirons (représentés en figure 2.7) satisferont bien cette condition. Sachant, comme on l'a démontré, que les  $a_i$  règlent la décorrélation du modèle, un coefficient  $a_i$  supérieur à  $1$  signifierait un mode de turbulence de plus en plus corrélé dans le temps, ce qui est physiquement absurde. Le choix d'un modèle qui ne soit pas absurde physiquement suffit donc pour s'assurer de la stabilité du système.

### 2.4.2 Commandabilité du système

On a expliqué au paragraphe 1.3 la notion de commandabilité, qui exprime l'influence du paramètre  $\mathbf{u}_n$  sur le vecteur d'état. On la détermine en exprimant la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_1)^2\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_1)^3\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_1)^4\mathbf{A}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Si  $\mathcal{C}$  est de rang plein, alors le système est commandable. Ici, cette matrice devient :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Les trois premières lignes nulles impliquent immédiatement que  $\mathcal{C}$  n'est pas de rang plein et que les trois premières composantes du vecteur d'état ne sont pas commandables. Il s'agit de la phase turbulente à trois instants différents et il est clair que ces variables ne sont par nature pas commandables. On ne cherche évidemment pas à les commander, cela n'influera donc pas sur l'optimalité de notre commande. Les deux autres composantes, correspondant aux tensions à deux instants différents sont commandables.

### 2.4.3 Observabilité du système

On a expliqué au paragraphe 1.3 la notion d'observabilité, duale de celle de commandabilité, et son importance. Le système est dit observable si la matrice d'observabilité est de rang plein. Cette matrice s'écrit ici

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^2 \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^3 \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} \\ 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} & 0 \\ \mathbf{D} & 0 & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} & 0 \\ \mathbf{D}\mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}(\mathbf{A}_{tur})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

On voit tout de suite que les deux dernières lignes ne sont pas linéairement indépendantes et que donc la matrice  $\mathcal{O}$  n'est pas de rang plein. Il y a donc un problème d'observabilité lié aux vecteurs  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$ . La raison en est la non-minimalité du vecteur d'état liée à notre volonté de pouvoir étendre le modèle au cas de l'OAMC en choisissant d'introduire dans  $\mathbf{X}_n$  des tensions plutôt que des phases résiduelles. Les conséquences sont mineures, puisque cette non-observabilité touche des quantités qu'on ne souhaite pas estimer, à savoir  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$ . Pour contourner cette difficulté, on va écrire au paragraphe 2.5.1 que  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$  sont connus et on va écrire l'estimateur sous forme d'un filtre de Kalman, sur la partie observable du vecteur  $\mathbf{X}_n$ . On ne perdra rien en optimalité d'estimation.

On détaillera en annexe C le problème de la perte d'observabilité du système.

## 2.5 Mise en œuvre du filtre de Kalman et de la commande.

### 2.5.1 Écriture du filtre de Kalman et de la commande

Si l'on suppose connus  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$ , il suffit pour estimer  $\mathbf{X}_n$  d'évaluer les valeurs estimées des trois premières composantes du vecteur d'état :  $\phi_{n-1}^{tur}$ ,  $\phi_n^{tur}$ ,  $\phi_{n+1}^{tur}$ .

On décompose le vecteur  $\mathbf{X}_n$  en une partie à estimer et une partie connue :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(1)} \\ \mathbf{X}_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

avec

$$\mathbf{X}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{X}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

et on va écrire l'estimateur sous forme d'un filtre de Kalman sur  $\mathbf{X}_n^{(1)}$ . On note  $\mathbf{C}_n^{(1)}$  la matrice de covariance d'erreur d'estimation de  $\mathbf{X}_n^{(1)}$ , alors la matrice de covariance d'erreur d'estimation de  $\mathbf{X}_n$  s'écrit

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_n^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

On peut remarquer ici que le coefficient 0 en bas à droite de  $\mathbf{C}_n$  signifie que l'erreur d'estimation est nulle sur les tensions  $\mathbf{u}$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$  sont connus, comme on l'a dit auparavant. On a alors pour le système  $[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}]$  les équations d'évolution :

$$\mathbf{X}_{n+1}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(1)} + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(2)} + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n, \quad (2.49)$$

et l'équation de mesure s'écrit

$$\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(2)} + \mathbf{W}_n. \quad (2.50)$$

$\mathbf{Y}_n$  est le modèle de mesure. D'après le paragraphe 1.3, le filtre de Kalman adapté à ce modèle s'écrit :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n/n}^{(1)} = \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^{(1)} + \mathbf{H}_n \tilde{\mathbf{Y}}_{n/n-1}, \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^{(1)} + \mathbf{L}_n \tilde{\mathbf{Y}}_{n/n-1}, \quad (2.52)$$

où  $\tilde{\mathbf{Y}}_{n/n-1}$  est l'innovation (cf. paragraphe 1.3), définie comme :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n/n-1} = \mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_{n/n-1} = \mathbf{Y}_n - \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^{(2)} \right). \quad (2.53)$$

Ici, le vecteur  $\mathbf{Y}_n$  représente la mesure expérimentale et non plus le modèle de mesure et  $\mathbf{L}_n$  est le gain optimal pour le sous-modèle défini par :

$$\mathbf{X}_{n+1}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(1)} + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_n, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{Y}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{(1)} + \mathbf{W}_n. \quad (2.55)$$

$\mathbf{L}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  sont donnés par les formules du paragraphe 1.3 :

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}_n \quad (2.56)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}_{n/n-1}^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{C}_{n/n-1}^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \quad (2.57)$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{C}_n^{(1)}$  est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation de  $\mathbf{X}^{(1)}$ .  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  est la prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation à l'instant  $n$  à partir des informations disponibles à  $n-1$ .  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  est solution de l'équation de Riccati (1.140).

A chaque fois qu'une nouvelle mesure  $\mathbf{Y}_n$  arrive, on peut calculer le nouvel estimé de  $\mathbf{X}_n$  avec l'équation (2.51). La nouvelle commande est alors calculée comme la projection de  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$  avec le projecteur de l'équation (2.4).

## 2.5.2 Le filtre asymptotique

Le filtre de Kalman ainsi exprimé nécessite de recalculer à chaque instant l'équation de Riccati pour obtenir  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  puis  $\mathbf{H}_n$  de façon optimale. Tout d'abord, il faut remarquer, comme cela a déjà été signalé au paragraphe 1.3, que le calcul de  $\mathbf{H}_n$  peut se faire hors temps réel, avant de fermer la boucle.

Il n'y a pas de solution analytique à l'équation de Riccati, qui donnerait immédiatement  $\mathbf{H}_\infty = \{\mathbf{H}_n\}_{n \rightarrow \infty}$ . Cependant, sous certaines conditions, on peut montrer que cette équation a une solution unique et il existe des algorithmes de résolution efficaces. Une méthode simple (mais pas la plus efficace) pour déterminer  $\mathbf{H}_\infty$  est d'itérer l'équation récursive pour calculer les matrices  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour alléger la commande et puisque l'équation de Riccati converge, on peut alors se contenter du filtre asymptotique, c'est-à-dire choisir  $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_\infty$  pour tout  $n$ .

L'équation de Riccati converge très vite et c'est ce qui fait l'efficacité du filtre asymptotique. On montrera au paragraphe 2.7.2 l'effet dans un cas de simulation précis sur la convergence du filtre de

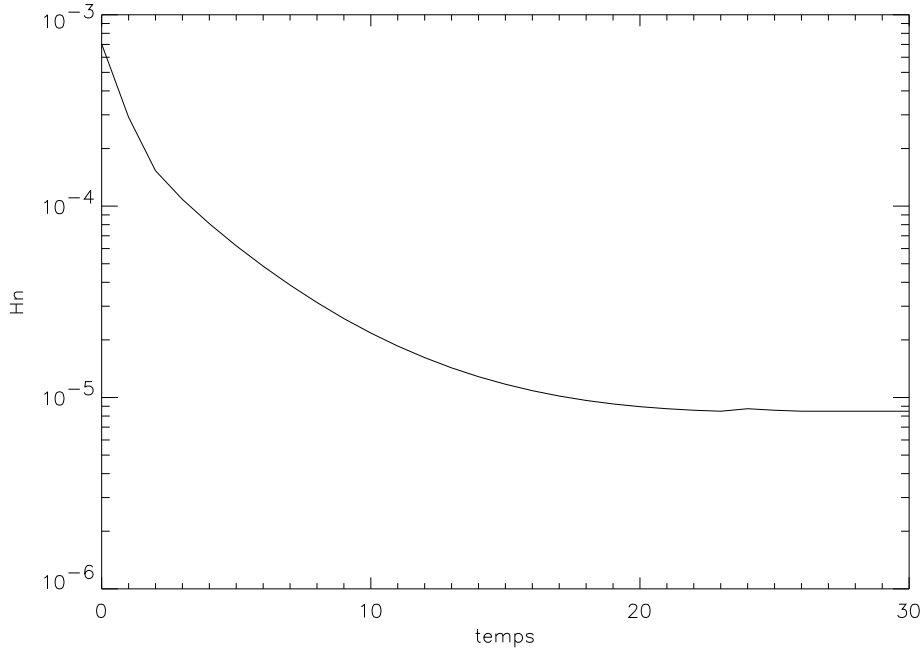


FIG. 2.5 – Evolution de la trace de  $\mathbf{C}_{n+1/n}$  en fonction de  $n$ . Dans ce cas précis de simulation, au bout de 25 itérations, la trace de  $\mathbf{C}_{n+1/n}$  a convergé, au bruit numérique près.

Kalman. On verra que cet effet n'est sensible que sur les premières itérations. On a présenté pour illustration en figure 2.5 l'évolution en fonction de  $n$  de la trace de  $\mathbf{C}_{n+1/n}$  dans un des cas de simulation qui seront présentés au paragraphe 2.7.1. On voit qu'au bout de  $n = 25$  environ, la trace de  $\mathbf{C}_{n+1/n}$  ne change plus, au bruit numérique près. La convergence est donc assurée en 25 itérations.

### 2.5.3 Introduction d'autres paramètres dans le modèle - correction des aberrations statiques

Le modèle présenté jusqu'à présent est un modèle général. Il est possible de lui faire prendre en compte des paramètres additionnels pour l'adapter à des contextes applicatifs différents. Par exemple, dans un système réel, la présence d'aberrations statiques, dues à des défauts dans les composants optiques, dégrade considérablement l'efficacité du système d'Optique Adaptative. L'un des intérêts de l'approche par modèle d'état est la facilité avec laquelle on peut tenir compte de ce genre de dégradations. Il suffit en effet d'adapter les équations (2.16), (2.32), (2.33) en ajoutant une phase constante à la phase turbulente.

Si l'on pose, pour un modèle turbulent d'ordre  $k = 1$ ,

$$\phi_n^{tot} = \phi_n^{cst} + \phi_n^{tur}, \quad (2.58)$$

$$\phi_n^{tur} = F[\phi_{n-1}^{tur}, \phi_{n-2}^{tur}, \phi_{n-3}^{tur}, \dots, \phi_{n-k}^{tur}] + \nu_n = \mathbf{A}_{tur} \phi_{n-1}^{tur} + \nu_n, \quad (2.59)$$

$$\phi_n^{cst} = \phi_{n-1}^{cst}, \quad (2.60)$$



on peut récrire le modèle du système avec le nouveau vecteur d'état

$$\mathbf{X}_n^{ab.stat.} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{cst} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tot} \\ \phi_{n-1}^{tot} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Le modèle d'état devient alors :

$$\mathbf{X}_{n+1}^{ab.stat.} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{ab.stat.} + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n \quad (2.62)$$

$$\mathbf{Y}_n^{ab.stat.} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & -N \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{ab.stat.} + \mathbf{W}_n. \quad (2.63)$$

On peut montrer que ce modèle a les mêmes caractéristiques que le précédent pour ce qui est de la stabilité, de l'observabilité et de la commandabilité. Le filtre de Kalman s'écrit alors sur ce modèle en procédant comme au paragraphe 2.5.1, en décomposant  $\mathbf{X}^{ab.stat.}$  en une partie à estimer  $\mathbf{X}^{ab.stat.,1}$  contenant les phases turbulentes et une partie connue  $\mathbf{X}^{ab.stat.,2}$  contenant les tensions des actionneurs. Alors

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^{ab.stat.,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^{ab.stat.,1} + \mathbf{L}_n^{ab.stat.} \tilde{\mathbf{Y}}_{n/n-1}^{ab.stat.}, \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{L}_n^{ab.stat.}$  est le gain optimal pour le sous-modèle défini par :

$$\mathbf{X}_{n+1}^{ab.stat.,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{ab.stat.,1} + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{Y}_n^{ab.stat.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^{ab.stat.,1} + \mathbf{W}_n. \quad (2.66)$$

On a ainsi défini le filtre qui permet d'estimer de façon optimale en les séparant les aberrations statiques du système et la phase turbulente. La tension  $\mathbf{u}_n$  est ensuite déduite de  $\phi_{n+1}^{tot}$ . On peut montrer que ce modèle permettrait également d'estimer des aberrations lentement variables.

On peut de la même façon introduire d'autres paramètres à prendre en compte dans le modèle. Par exemple, l'effet d'aliasing, défini au paragraphe 1.2, l'incertitude sur les modèles, une vibration du télescope, ou tout phénomène qui aurait un impact sur la performance du système et que l'on voudrait prendre en compte (cf. paragraphe 2.8).

## 2.6 Bibliographie - comparaison aux travaux précédents

On va commencer par comparer formellement l'approche que l'on propose avec des techniques de contrôle d'un système d'OA classique proposées jusqu'à présent.

### 2.6.1 L'intégrateur à gain modal optimisé

On a présenté en section 1.3 l'Intégrateur à Gain Modal Optimisé (IGMO), introduit par Eric Gendron en 1994 [GL94a], [GL94b], [Gen95]. Cet estimateur est un filtre modal, c'est-à-dire qu'il découple la commande mode à mode. Il n'utilise donc pas l'information contenue dans les corrélations spatiales entre modes. D'un point de vue temporel, il suppose une structure de correcteur de type intégrateur.

Cela signifie, pour comparer cette approche avec celle que nous proposons, que l'IGMO optimise la commande hors prédiction dans un cadre restrictif qui est celui d'un intégrateur modal. Il y a donc deux différences majeures entre cette approche et la nôtre : l'absence de prédiction, et la sous-optimalité de la loi de commande. Nous verrons par simulation numérique dans le paragraphe 2.7.1 comment cela influe sur les performances du système.

On a déjà abordé au paragraphe 1.3 la question du choix de la base de modes dans laquelle on calcule les gains de l'IGMO. Cette question se pose en raison de la particularisation qui est faite d'une base par rapport aux autres. On peut effectivement optimiser l'intégrateur sur la base de son choix. Ce problème a fait se poser beaucoup de questions à l'occasion des études précédentes. Base du miroir, base propre du système, base des Karhunen-Lœve, les choix effectués ont été bien souvent différents [DMR98], [Rou00]. La base optimale dépend de la turbulence et du système (niveau de bruit, analyseur). L'OMGI est sous-optimale par rapport à un traitement global. L'approche que l'on propose ne particularise aucune base. On représente la phase turbulente sur une base, quelle qu'elle soit, par exemple les zernikes, la correction sur la base des actionneurs, la mesure dans la base des pentes, et toutes ces bases sont reliées explicitement dans les équations du système par les matrices de changement de base. Si la base de description de la turbulence n'est pas la même, la forme des équations est différente, mais le résultat est le même. La seule limitation est la troncature faite pour décrire la turbulence sur un nombre fini de modes.

Dans la suite du mémoire, nous avons choisi l'approche IGMO pour établir notre comparaison avec le filtrage de Kalman en simulation numérique parce qu'elle est utilisée aujourd'hui dans des systèmes d'OA réels, notamment le système NAOS [Rou00].

### 2.6.2 Le prédictor modal optimisé

On a présenté en section 1.3 le prédictor modal optimisé (PMO) proposé par Caroline Dessenne en 1998 [DMR98], [Des98]. Comme l'IGMO, il s'agit d'une commande modale, qui ne prend pas en compte les corrélations entre modes et qui traite donc chaque mode indépendamment les uns des autres. Mais la loi de commande n'est plus un intégrateur, elle est plus complexe que l'IGMO.

Il est possible de réinterpréter ces travaux dans un formalisme d'état de façon à les comparer avec les nôtres.

L'équation à partir de laquelle est calculé le prédictor modal, équation (1.69), peut s'écrire

$$\hat{\phi}_{n+1}^{tur} + \Upsilon_1 \hat{\phi}_n^{tur} + \Upsilon_2 \hat{\phi}_{n-1}^{tur} + \Upsilon_3 \hat{\phi}_{n-2}^{tur} = \Upsilon_4 \phi_n^{res,mes} + \Upsilon_5 \phi_{n-1}^{res,mes} + \Upsilon_6 \phi_{n-2}^{res,mes}. \quad (2.67)$$

Les  $\Upsilon_i$  sont des matrices diagonales.

On sait de plus  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \phi_n^{res,mes} = \mathbf{D}(\phi_{n-1}^{tur} - \phi_{n-1}^{cor}) + \mathbf{W}_n = \mathbf{D}(\phi_{n-1}^{tur} - \hat{\phi}_{n-1}^{tur}) + \mathbf{W}_n$ .

Alors, on va chercher le modèle d'état équivalent et l'observateur associé qui donnent la même loi de commande. On cherche donc à écrire un modèle d'état de la forme des équations (2.32) et (2.33) :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_n + \Gamma \mathbf{V}_n, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_n + \mathbf{A}_3 \mathbf{W}_n \quad (2.69)$$

tel que l'équation (2.67) soit équivalente à un observateur sur ce modèle, c'est-à-dire à

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_n + \mathbf{L}(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n). \quad (2.70)$$

On peut montrer (les calculs seront détaillés en Annexe B) qu'il faut choisir le vecteur d'état comme :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{Y}_n = \phi_{n-1}^{tur} + \mathbf{D}^+ \mathbf{W}_n, \quad (2.72)$$

où  $\mathbf{D}^+$  est la matrice inverse de  $\mathbf{D}$  si  $\mathbf{D}$  est inversible et son inverse généralisée sinon, et il faut prendre comme matrices du modèle d'état

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\Upsilon_1 & -\Upsilon_2 & -\Upsilon_3 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{Id} \end{pmatrix} \mathbf{A}_3 = \mathbf{D}^+. \quad (2.75)$$

Le prédictor modal à la Dessenne a ainsi la structure d'un observateur sur  $\phi_n^{tur}$ , de la forme de (2.70), avec une matrice  $\mathbf{L}_n$  constante égale à

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Upsilon_6 - \Upsilon_1 - \Upsilon_4(\Upsilon_2 - \Upsilon_1^2)\Upsilon_4 \\ \Upsilon_5 - \Upsilon_1\Upsilon_4 \\ \Upsilon_4 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

On a donc montré qu'on pouvait réinterpréter les travaux de Caroline Dessenne dans le formalisme d'état. Le prédictor modal qu'elle propose est dans ce formalisme un observateur sous-optimal qui permet d'estimer le vecteur  $\phi_n^{tur}$ . Néanmoins, il faut remarquer qu'elle estime en fait par un algorithme itératif les valeurs des coefficients  $\Upsilon_i$  à partir de mesures boucle ouverte de la turbulence. Elle

n'écrit pas comme on l'a fait de relation physique qui relie ces différentes matrices, alors que notre approche consisterait à choisir à partir de considérations physiques (par exemple la non-divergence du phénomène) les coefficients des équations d'état.

On a vu au paragraphe 2.4.1 que le modèle que l'on avait choisi était stable parce que physique (dissipatif). Puisque le prédictor modal n'est pas construit sur un modèle physique, comme l'est le filtre de Kalman, il n'y a pas d'assurance de stabilité *a priori*. Même s'il y a bien un modèle implicite, comme on l'a montré, il n'est pas bien contrôlé. Les paramètres  $\Upsilon_i$  doivent alors être estimés sous contrainte de stabilité. En effet, l'étude de la stabilité du système défini par les équations (2.68) et (2.69) montre que le système est stable si et seulement si les racines d'un polynôme du troisième degré (le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}_1$ ) paramétré par les coefficients des matrices  $\Upsilon_i$  sont toutes comprises entre  $-1$  et  $1$ . On montre simplement que le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}_1$  est égal à

$$P = x^3 + x^2 \prod_j \Upsilon_{1,j} + x \prod_j \Upsilon_{2,j} + \prod_j \Upsilon_{3,j}, \quad (2.77)$$

où  $\Upsilon_{i,j}$  est le  $j^e$  coefficient de la diagonale de  $\Upsilon_i$ . Cette condition sur les valeurs de  $\Upsilon_i$  n'est pas triviale à prendre en compte.

L'estimation des  $\Upsilon_i$  dans l'approche Dessenne revient à choisir un gain d'observateur  $\mathbf{L}$  de la forme (2.76). L'optimalité de l'estimateur, assurée dans notre approche par l'utilisation d'un filtre de Kalman basé sur un modèle stable pour le calcul du gain de l'observateur  $\mathbf{L}$  optimal, n'est plus assurée dans l'approche Dessenne. De plus, l'utilisation du formalisme d'état permet une plus grande souplesse dans la manipulation des différents paramètres du système, et ceci à travers l'écriture de l'équation d'état du système. C'est cette grande souplesse d'utilisation qui permettra de généraliser l'approche présentée pour l'Optique Adaptative Classique à l'Optique Adaptative Multiconjuguée.

### 2.6.3 Utilisation d'un formalisme d'état en OA

R. Paschall et D. Anderson [PA93] ont déjà proposé, en 1993, une approche par modélisation d'état, commande LQG et retour d'état reconstruit par filtrage de Kalman pour obtenir l'optimalité de la commande en OA classique (mais pas multiconjuguée). Il existe plusieurs éléments de similitudes entre leur approche et la nôtre. Notamment la description de la phase turbulente avec un modèle d'état stochastique auto-régressif du premier ordre, AR1, dont les paramètres sont choisis pour ajuster la décorrélation temporelle sur celle d'une turbulence Taylor. Ils utilisent également un filtre de Kalman pour estimer la phase turbulente et insèrent la phase estimée dans la commande optimale.

Il y a néanmoins entre leur approche et la nôtre un certain nombre de différences. La première et la plus visible est l'usage qu'ils font d'une représentation continue pour les phénomènes turbulents. On a dit qu'ils utilisent un modèle AR1 pour décrire l'évolution de  $\phi^{tur}$ . Mais il s'agit d'un modèle temporellement continu. La mesure, bien-sûr, se fait, elle, de façon discrète, ce qui les oblige à discrétiser après coup le modèle. Dans notre approche, nous discrétisons le problème dès le début en choisissant comme variable pertinente la moyenne de la phase sur le temps de pose. Ceci permet de s'affranchir de cette étape de discrétisation, qui complique l'approche et qui pose la question de savoir quel type de discrétisation on choisit, point qui n'est d'ailleurs pas très discuté dans leur article.

Une deuxième différence, que l'on a déjà évoquée au paragraphe 2.1.1, est le choix de décrire la dynamique du miroir au lieu de remarquer comme nous l'avons fait qu'elle est négligeable de-

vant la période temporelle de l'asservissement. R. Paschall et D. Anderson choisissent dans [PA93] un modèle AR1 pour décrire la dynamique du miroir. Ce modèle a donc, comme tout modèle AR1, une décorrélation temporelle exponentielle, de temps caractéristique 0,45 ms alors que leur période d'échantillonnage temporel est de 7 ms. Il y a donc presque un rapport 20 entre les deux, ce qui tend à prouver le manque d'utilité de la description de la dynamique du miroir. Ce choix les conduit finalement à mettre en œuvre une commande LQG (cf. 1.3), plus complexe que la commande à réponse pile que nous suggérons. Cette commande est inutile dans les cas de simulations qu'ils ont mis en œuvre dans leur article et également dans les simulations qui seront présentées dans ce mémoire. Pour des systèmes à miroirs massifs ou à lente dynamique cela pourrait devenir nécessaire. Par exemple pour un système à miroir secondaire adaptatif ou un miroir tip-tilt massif.

Troisième différence, de part leur choix de vecteur d'état, R. Paschall et D. Anderson séparent l'estimation de la phase turbulente par filtrage de Kalman de la prédiction temporelle par un modèle AR1. L'introduction dans notre modèle d'état des trames de retard et de la phase turbulente future assure l'optimalité de la prédiction, en plus de simplifier son écriture en un seul filtre de Kalman.

Autre différence, il est surprenant de remarquer que dans leur article R. Paschall et D. Anderson ne choisissent de corriger que très peu de modes turbulents, 14 modes exactement, alors que leur miroir dispose de 97 actionneurs, donc 97 degrés de liberté. Ils justifient ce choix par la décroissance énergétique des modes turbulents exprimés sur les zernikes. Les tensions des 97 actionneurs sont ensuite choisies au mieux par la commande LQG. Il nous semblerait néanmoins naturel d'utiliser tous les degrés de liberté disponibles. La perte de performance due à ce choix peut être déduite de la formule de Noll qui donne la variance résiduelle d'une OA corrigeant parfaitement jusqu'au  $j^{\text{e}}$  Zernike (cf. 1.2). On trouve

$$\sigma_{\text{perte}}^2 = \sigma_{\text{res}}^2(j_{\text{max}} = 14) - \sigma_{\text{res}}^2(j_{\text{max}} = 97) \simeq 0.2944(14)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.78)$$

$$\simeq 1.13\text{rad}^2 \quad (2.79)$$

quand la variance turbulente totale est de 11 radians environ. R. Paschall et D. Anderson négligent de corriger 10% de la turbulence et le rapport de Strehl maximal qu'ils peuvent espérer atteindre est de 32%.

On voit donc que l'approche suggérée par Paschall et Anderson a plusieurs points en commun avec celle que nous suggérons mais qu'il y a un certain nombre d'éléments les distinguant.

#### 2.6.4 Approche par moindres carrés récurrents avec oubli

Dans ses papiers successifs [Ell94], [Ell97], [Ell01] B. Ellerbroek utilise des estimateurs de type moindres carrés récurrents pour estimer la phase turbulente. Son approche consiste à reconstruire la phase turbulente mode à mode en ôtant la composante miroir à la mesure. La sortie de l'analyseur est écrite  $s(t) = y(t) - Gc(t)$ , avec  $s(t)$  les pentes mesurées par l'analyseur et  $Gc(t)$  la phase de correction, produite par le miroir auquel les tensions  $u(t)$  sont appliquées.  $y(t) = s(t) + Gc(t)$  est alors une mesure virtuelle de la phase turbulente. L'estimation est ensuite effectuée en statique, instant par instant et sans prendre en compte la rémanence temporelle du signal de façon optimale. Il utilise pour ce faire un estimateur de type moindres carrés récurrents auquel il ajoute un terme d'oubli qui

permet de ne pas prendre en compte les trop vieilles mesures. Cette estimation est suivie d'une étape de prédiction utilisant un modèle AR1 semblable au nôtre.

L'utilisation d'un modèle d'évolution réaliste comme le notre et tout intégré, autant pour utiliser la rémanence du signal au moment de l'estimation que pour prédire la phase deux instants plus tard permet d'obtenir une meilleure commande que l'approche de "moindres carrés récurrents avec oubli".

De plus, comme R. Paschall et D. Anderson, B. Ellerbroek propose une approche présentée pour moitié dans un formalisme continu et pour moitié en discret. On a déjà précisé la complexité qu'apporte cette démarche.

### 2.6.5 Estimation statique optimale

On a parlé jusqu'à présent de systèmes en boucle fermée, où l'analyseur voit une phase résiduelle. On peut également envisager un système "boucle ouverte", c'est-à-dire un système où l'analyseur est placé avant le miroir et mesure directement la phase turbulente. Dans le cas boucle ouverte, on peut ensuite envisager deux cas. Le cas dynamique, où le signal est un enchaînement d'événements corrélés entre eux et le cas statique où les événements sont indépendants entre eux et traités l'un après l'autre en oubliant les précédents.

On a présenté en section 1.3 l'estimateur optimal pour le cas statique proposé pour l'OA classique en 1983 par Wallner [Wal83] et réinterprété matriciellement par Thierry Fusco [Fus00]. On va montrer comment on peut retrouver ce résultat d'estimation statique en posant le problème en terme de modèle d'état et de filtre de Kalman. L'estimation statique a pour principe, nous le rappelons, de déterminer, à partir de chaque mesure  $\mathbf{Y}_n$  prise isolément la meilleure estimation de  $\phi_n^{tur}$ . Il n'y a donc pas de notion de correction ni de retard. Il est alors inutile d'introduire dans le vecteur d'état les paramètres  $\mathbf{u}_n$  ou  $\mathbf{u}_{n-1}$  comme nous l'avions fait dans le cas dynamique. De même, les événements sont décorrélés d'un instant à l'autre, il est donc inutile que le vecteur d'état contienne plusieurs instants de la phase puisqu'on ne peut pas prendre en compte son évolution. Le vecteur d'état se retrouve donc réduit à

$$\mathbf{X}_n = \phi_n^{tur}. \quad (2.80)$$

L'équation d'état est elle aussi simplifiée, puisqu'on ne considère pas la corrélation temporelle de la phase turbulente. Cela revient en fait à poser une équation d'évolution de la phase turbulente qui exprime que la phase évolue d'un instant à l'autre de façon totalement non corrélée, comme un bruit blanc, ce qui revient à poser dans (2.29)  $\mathbf{A}_1 = 0$  et  $\mathbf{A}_2 = 0$  puisqu'il n'y a pas de correction. L'équation (2.29) devient donc

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n, \quad (2.81)$$

où  $\mathbf{V}_n$  est un bruit blanc à moyenne nulle. L'équation (2.80) indique que la matrice de covariance de  $\mathbf{V}_n$  est en fait la matrice  $\mathbf{C}_{Kol}$ . L'équation de mesure s'écrit :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D}\mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n, \quad (2.82)$$

avec  $\mathbf{W}_n$  un bruit blanc de matrice de covariance connue  $\mathbf{C}_w$ . Alors le filtre optimal (estimateur et pas prédictif) devient :

$$\hat{\phi}_{n/n}^{tur} = \hat{\phi}_{n/n-1}^{tur} + \mathbf{H}_n^{stat} \left( \mathbf{Y}_n - \mathbf{D}\hat{\phi}_{n/n-1}^{tur} \right), \quad (2.83)$$

où  $\mathbf{H}_n^{stat}$  est la matrice  $\mathbf{H}_n$  du paragraphe 1.3 adaptée au système statique.  $\hat{\phi}_{n/n-1}^{tur}$  est l'estimée que l'on peut faire de la phase à l'instant  $n$  en ne connaissant que les mesures antérieures à  $n$ . Puisqu'on considère que la phase est décorrélée d'un instant à l'autre et qu'elle est à moyenne nulle, (2.81), cet estimé est égal à 0. Alors on a simplement

$$\hat{\phi}_{n/n}^{tur} = \mathbf{H}_n^{stat} \mathbf{Y}_n. \quad (2.84)$$

De plus, dans le calcul de  $\mathbf{H}_n^{stat}$ , puisque  $\mathbf{A}_1 = 0$ , on trouve la matrice  $\mathbf{C}_{n+1/n} = \mathbf{C}_v = \mathbf{C}_{Kol}$  et donc immédiatement

$$\mathbf{H}_n^{stat} = \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^{-1}. \quad (2.85)$$

L'estimateur optimal obtenu par un filtre de Kalman dans une modélisation d'état est donc finalement :

$$\hat{\phi}_{n/n}^{tur} = \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w)^{-1} \mathbf{Y}_n, \quad (2.86)$$

c'est-à-dire exactement celui proposé par Wallner [Wal83] et explicité par T. Fusco en version matricielle [Fus00].

On a donc montré comment interpréter dans un formalisme d'état l'estimateur statique optimal. Ceci montre également inversement comment l'approche que l'on propose est la continuation et l'élargissement au cas dynamique des travaux précédents en estimation optimale de la phase en OA et OAMC [FCR<sup>+</sup>01].

Il y a un cas intermédiaire entre le statique boucle ouverte et le dynamique boucle fermée, qui est le cas boucle ouverte dynamique. Ce cas-là peut être traité par notre approche en transformant simplement l'équation de mesure (2.15) en équation de mesure boucle ouverte :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \phi_{n-1}^{tur} + \mathbf{W}_n \quad (2.87)$$

et en adaptant le modèle de mesure (2.33)

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n. \quad (2.88)$$

Les équations du filtre correspondant à ce cas sont similaires à celles présentée précédemment, avec les matrices adaptées. On voit donc que l'approche que l'on propose peut être vue comme une généralisation au cas dynamique, qu'il soit boucle ouverte ou boucle fermée, des travaux d'estimation statique optimale.

## 2.7 Simulations numériques

Dans cette section, nous allons présenter une simulation numérique de l'approche proposée analytiquement jusque-là. Il s'agit d'abord de donner un exemple de mise en œuvre du filtre de Kalman et de la commande suggérés pour l'OA et ensuite d'estimer le gain apporté par le filtrage de Kalman comme estimateur de la phase turbulente par rapport aux estimateurs classiques. Après avoir présenté le cadre et les conditions choisies pour effectuer nos simulations numériques, nous comparerons les performances d'un filtre de Kalman et d'une commande IGMO, avec une turbulence de type AR1 ou

Taylor, dans un cas d'OA classique et dans un cas dit "pseudo multiconjugué", que nous définirons pour qu'il soit analogue à un cas OAMC.

Ce choix de comparer les performances d'un système géré avec un filtre de Kalman et celles d'un système équivalent géré par une commande IGMO est motivé par le fait que la commande IGMO est la plus "avancée" des techniques utilisées aujourd'hui sur des systèmes existants. Elle est utilisée par exemple sur NAOS [Rou00].

### 2.7.1 Conditions de simulation

Le choix des conditions de simulation a été fait pour se rapprocher d'un cas réaliste, autant pour ce qui est de la simulation de la turbulence atmosphérique que de la définition du système. Bien-sûr, des choix ont été faits qui facilitent la mise en œuvre numérique (taille de matrices et temps de calcul raisonnables), mais toujours avec le souci de rester représentatif d'un système réaliste.

Les deux modes de génération de la phase, modèle AR1 et turbulence Taylor sont tout d'abord présentés, une équivalence entre sera établie les deux. On présentera ensuite les caractéristiques du système et la mise en œuvre des estimateurs Kalman et IGMO.

#### 2.7.1.1 Les deux générateurs de turbulence atmosphérique

Dans nos simulations, nous avons généré la phase turbulente de deux façons différentes, d'une part selon un modèle AR1 et de l'autre comme une turbulence Taylor. La phase turbulente est dans les deux cas représentée sur la base des polynômes de Zernike.

Pour le premier modèle, AR1, on calcule itérativement la phase à l'instant  $n + 1$  en fonction de la phase à l'instant  $n$  :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}\phi_n^{tur} + \boldsymbol{\nu}_n, \quad (2.89)$$

où  $\boldsymbol{\nu}_n$  est une variable aléatoire tirée selon une loi normale et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}}$ . On choisit tout d'abord  $\mathbf{A}$  diagonale, ce qui revient à négliger les interspectres :  $E[\phi_n^{tur,i} \phi_{n+1}^{tur,j}] = 0$ . Pour s'assurer ensuite que la turbulence ainsi générée a une énergie globale finie, on choisit

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{C}_{Kol} - \mathbf{A}_{tur}^T \mathbf{C}_{Kol} \mathbf{A}_{tur}, \quad (2.90)$$

où  $\mathbf{C}_{Kol}$  est la matrice de covariance de Kolmogorov. La matrice  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}}$  est donc non diagonale. Pour faire les tirages aléatoires des valeurs de  $\boldsymbol{\nu}_n$  avec la bonne statistique, on utilise la méthode de N. Roddier [Rod90]. On commence par passer dans la base qui diagonalise  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}$  avec  $\mathbf{\Lambda}$  diagonale et  $\lambda_i$  le  $i^e$  élément de la diagonale. Dans cette base, on fait des tirages mode à mode avec la variance de  $\nu^{(i)}$  égale à  $\lambda_i$ . On repasse ensuite dans la base de départ pour obtenir le vecteur  $\boldsymbol{\nu}_n$  avec la bonne statistique.

Le deuxième générateur de turbulence est basé sur l'hypothèse de Taylor, dans laquelle la turbulence est constituée de couches turbulentes en translation uniforme. On fait défiler trois écrans Kolmogorov représentés en point à point à des vitesses identiques (le rapport  $V/D$  est égal à 2 Hz) mais avec des directions de vent différentes, orientées à 0, 120 et 240 degrés. La phase  $\phi^{tur}$  est calculée à l'instant  $n$  comme la somme sur les trois écrans du découpage de la pupille à cet instant. On la décompose ensuite sur les polynômes de Zernike. Les écrans Kolmogorov sont calculés par passage



dans le plan de Fourier, selon la méthode de Mac Glamery [MG76] sur des écrans de 1024 par 1024 pixels. La pupille s'inscrit dans un carré de 64 pixels de côté. Il faut remarquer que cette méthode de simulation d'écran de phase induit une grande échelle implicite égale à environ la moitié de la taille des écrans dans le plan de Fourier.

La phase turbulente simulée dans les deux cas se compose de 13 ordres radiaux, soit du polynôme de Zernike numéro 2 au numéro 105 (pas de mode piston) et le  $\frac{D}{r_0}$  est choisi égal à 10.

### 2.7.1.2 Le système d'OA

La mesure sur la phase turbulente est de la forme de l'équation (2.14)

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D}\phi_{n-1}^{res} + \mathbf{W}_n. \quad (2.91)$$

Dans les premières simulations, pour simplifier, nous avons choisi  $\mathbf{D} = \mathbf{Id}$ . L'analyseur mesure directement les 104 polynômes de Zernike. Cette hypothèse est classique et justifiable en considérant le fait que l'analyseur, qui est avant tout un échantillonneur, est donc un filtre passe-bas. Or les bas ordres de zernikes correspondent aux basses fréquences spatiales. Il est donc raisonnable de choisir un analyseur virtuel qui mesure directement des zernikes. C'est un choix classique, qui a été fait dans des études précédentes [Fus00]. Le bruit sur l'analyse a été néanmoins coloré pour être équivalent à un bruit provenant d'une reconstruction de données Shack-Hartmann. On rappelle (paragraphe 1.2) que le bruit provenant de mesures SH est, pour l'ordre radial  $r$  [RG92]

$$\mathbf{W}_r = \frac{1.28}{RSB} \left( \frac{D/r_0}{n_{spp}} \right)^{\frac{5}{3}} (r+1)^{-2}, \quad (2.92)$$

avec  $n_{spp}$  le nombre de sous-pupilles du Shack-Hartmann. Il a été choisi égal à 10. Dans [RG92], les derniers modes de chaque ordre radial sont légèrement surexcités, ce que l'on a négligé.

Dans les simulations correspondant au cas pseudo-OAMC, on a choisi une matrice  $\mathbf{D}$  différente de l'identité, mais on a conservé la même évolution pour le bruit sur l'analyse.

Pour ce qui est du miroir, la matrice  $\mathbf{N}$  qui relie la base des actionneurs à celle des zernikes a été choisie égale à l'identité. Cela signifie que le miroir corrige directement des polynômes de Zernike. De même que précédemment, on peut justifier ce choix en disant qu'un miroir déformable, en tant que réseau d'actionneurs, corrige les basses fréquences. Les premiers polynômes de Zernike, basses fréquences, peuvent donc constituer un choix raisonnable pour représenter la base de correction du miroir dans une première approximation.

### 2.7.1.3 Mise en œuvre de l'IGMO

On a vu au paragraphe 1.3.1 que le calcul des gains optimaux de l'IGMO est effectué mode à mode. Il faut d'abord choisir une base et connaître la DSP turbulente et le bruit propagé dans cette base. On doit enfin tenir compte des fonctions de transfert de la boucle fermée et la fonction de transfert de réjection. On va préciser ici la procédure utilisée dans nos simulations.

On a toujours choisi comme base de calcul des gains optimaux la base qui diagonalise  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ , la "base propre" du système [DMR98]. Dans le premier cas, où  $\mathbf{D} = \mathbf{Id}$ , cette base sera directement la base des zernikes. On traitera ensuite le cas où cette base est plus compliquée.

Pour ce qui est des DSP mode à mode de la phase turbulente, il faut distinguer les deux cas de génération de la phase. Dans le cas d'une phase Taylor, on a choisi d'utiliser la formule analytique des DSP, qui se comportent en  $f^0$  avant une fréquence de coupure  $f_c$  et en  $f^{-17/3}$  après [CRM95] (sauf pour le tilt, en  $f^{-2/3}$  avant  $f_c$ ). La fréquence de coupure est choisie pour l'ordre radial  $r$  suivant la formule  $f_c^{(r)} \simeq 0.3(r+1)V/D$ .

Pour ce qui est de la turbulence générée à partir du modèle AR1, on a estimé numériquement la DSP par transformée de Fourier de la décorrélation exponentielle.

Le bruit propagé sur la base des zernikes est exactement celui explicité par la formule (2.92), décroissant par paliers d'ordre radial.

Quant aux fonctions de transfert, on a utilisé l'écriture qu'en donne Dessenne [Des98]. A savoir, pour la fonction de transfert du bruit

$$H = \frac{G}{1+G} \quad (2.93)$$

et pour la fonction de réjection

$$E = \frac{1}{1+G}, \quad (2.94)$$

avec  $G$  la fonction de transfert de la boucle ouverte [Des98] :

$$G(\omega) = \left( \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega T} \right)^2 \exp(-j\omega \tau) C(z). \quad (2.95)$$

$T$  est la période temporelle de l'asservissement,  $\tau$  le "retard pur",  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  la pulsation et  $C(z)$  le correcteur avec  $z$  la variable de la transformation en  $z$ . Pour un intégrateur de gain  $g$ ,  $C(z) = g/(1 - z^{-1}) = g/(1 - \exp(-j\omega T))$ .

On a représenté pour illustration en figure 2.6 les fonctions de transfert  $E$  et  $H$ .  $E$  a été également estimée à partir de notre simulation. Pour ce faire, nous avons remplacé en entrée du système la phase turbulente par un bruit blanc puis nous avons estimé la phase résiduelle et sa DSP.  $E$  peut alors être approximée comme [Des98]

$$E \simeq \frac{\text{DSP}_{res}}{\text{DSP}_{\text{bruit blanc}}}. \quad (2.96)$$

Une fois connues ces différentes fonctions, et connaissant la DSP de la turbulence et le niveau de bruit, on peut calculer pour un mode donné le critère à minimiser en fonction du gain (1.62). Pour minimiser ce critère, on a opéré de la façon la plus simple qui soit, en parcourant la gamme des  $\rho$ ,  $\rho \in [0, 1]$ , par pas de 0.01. Une fois qu'on a obtenu les gains  $g_i$ , dans le cas  $\mathbf{D} = \mathbf{Id}$ , on applique directement  $g_i$  au mode  $i$  et on ferme la boucle.

Quand la matrice  $\mathbf{D}$  est différente de l'identité (ce qui sera par exemple le cas dans nos simulations OAMC), le calcul des DSP turbulentes est moins direct. Il nécessite de passer par les DSP de la base des zernikes dans la base que l'on a choisi, dans notre cas celle qui diagonalise  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ . Si l'on écrit  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  sous la forme

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^T, \quad (2.97)$$

on peut montrer que la DSP de la phase turbulente dans la base d'intérêt s'écrit :

$$DSP_{j,diag}^{tur} = \sum_j M_{i,j}^2 DSP_j^{tur} \quad (2.98)$$

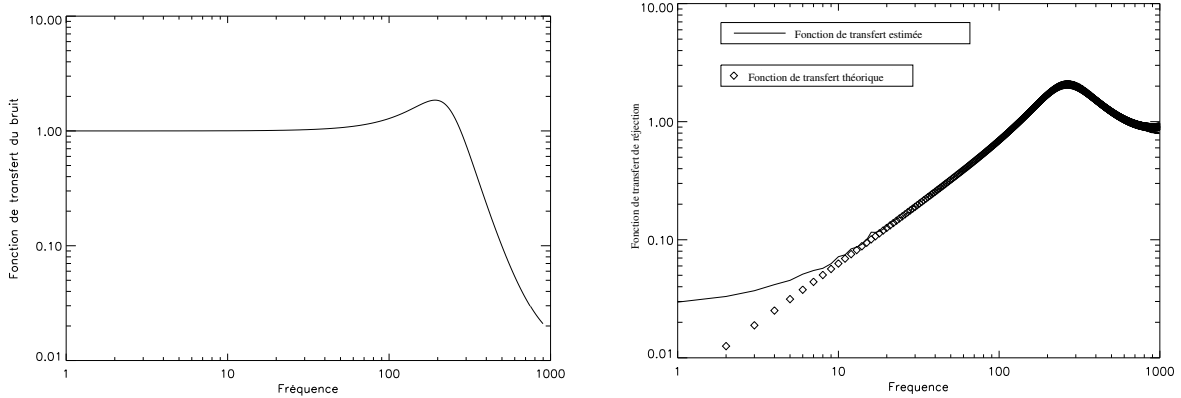


FIG. 2.6 – Fonction de transfert de la boucle fermée  $|H|$  pour un gain de 0.5 (figure de gauche) et fonction de transfert de réjection  $|E|$  pour un gain de 0.5, théorique et estimée en simulation.

avec  $M_{i,j}$  le  $i^e$  élément de la  $j^e$  colonne de  $\mathbf{M}$ . Pour obtenir ce résultat, on a fait l'hypothèse que les interspectres sont négligeables.

On peut obtenir également la propagation du bruit dans la base qui diagonalise  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  :

$$DSP_{j,diag}^{bruit} = \sum_i \left( \mathbf{M}_i \mathbf{D}_j^T \right)^2 \frac{1}{\lambda_i^2} DSP_{j,Zern}^{bruit}. \quad (2.99)$$

$\mathbf{M}_i$  est la  $i^e$  ligne de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{D}_j$  la  $j^e$  ligne de  $\mathbf{D}$ . On a déjà dit au paragraphe 1.3.1 que le gain sur chaque mode est ajusté par l'IGMO en fonction du niveau de bruit sur ce mode et de la force de la turbulence, pondérés par les fonctions de transfert de la boucle fermée. On voit alors sur l'équation (2.99) que les modes propres pour lesquels la valeur propre tend vers 0 ont une DSP du bruit dans la base propre du système qui tend vers l'infini. L'IGMO va alors naturellement filtrer ces modes en leur assignant un gain nul par la minimisation du critère (1.62). Dans les cas où  $\mathbf{D}$  est différente de l'identité nous avons dans nos simulations estimé le gain de la même façon que précédemment, en parcourant la gamme des  $\rho$ ,  $\rho \in [0, 1]$ , par pas de 0.01.

On décompose ensuite  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  comme  $\mathbf{M}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}$

$$u_{n+1} = \left( \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{Y}_n = \left( \mathbf{M}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{M} \right) \mathbf{D}^T \mathbf{Y}_n \quad (2.100)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  matrice diagonale. On applique ensuite les gains  $g_i$  sur la diagonale de  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ . Dans le cas où  $\mathbf{D} = \mathbf{Id}$ , la base des zernikes est celle qui diagonalise  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  et  $\mathbf{M} = \mathbf{Id}$ . Alors on peut décomposer la commande mode à mode

$$u_{i,n+1} = g_i \mathbf{Y}_{i,n}. \quad (2.101)$$

Il faut remarquer que suivant la nature de la turbulence, AR1 ou Taylor, on a adapté l'IGMO en calculant les gains optimaux à partir de la DSP turbulente correspondante, en  $f^{-2}$  ou  $f^{-17/3}$  après  $f_c$ .

### 2.7.1.4 Mise en œuvre du filtrage de Kalman

Le filtre de Kalman est construit à partir d'un modèle AR1 de l'évolution de la turbulence. On a créé indépendamment la phase turbulente à partir d'un autre modèle AR1 qui peut être différent ou identique au modèle du filtre. Il faut bien distinguer les deux modèles. Dans les simulations prenant en entrée un générateur AR1, nous avons appliqué le filtre de Kalman calculé à partir du même modèle AR1.

Nous avons mis en œuvre en simulation le filtrage de Kalman sous la forme de l'équation (2.51), qui donne la valeur du vecteur d'état  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$  dans lequel les  $n_{zern}$  premières composantes  $\hat{\phi}_{n+1}^{tur}$  correspondent à la phase que l'on cherche, qu'il ne reste plus qu'à projeter sur la base du miroir. En l'occurrence, puisque  $\mathbf{N} = \mathbf{Id}$ , les nouvelles tensions sont directement les  $n_{zern}$  premières composantes de  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$ .

Il faut noter qu'on a utilisé pour nos simulations le filtre asymptotique, c'est-à-dire la valeur limite de  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  quand  $n$  tend vers l'infini. En pratique, on a laissé converger l'équation de Ricatti (1.140) pendant 50 itérations avant de fermer la boucle. L'intérêt du filtre asymptotique est qu'il nous évite de recalculer l'équation de Ricatti à chaque itération. On montrera dans un cas de simulation l'écart en fonction du temps entre la performance du filtre de Kalman optimal et du filtre asymptotique et on verra que cela n'affecte que les premières itérations.

### 2.7.1.5 Le calcul de performances

La variance de phase résiduelle a été calculée en prenant en compte la variance des ordres supérieurs à 13, non simulés. En d'autres termes, on a simulé 13 ordres radiaux de Zernike turbulents, 13 ordre radiaux de correction et on a calculé numériquement une variance résiduelle sur ces 13 ordres radiaux

$$\sigma_{res,1:13}^2 = \sum_{r=1}^{13} \sigma_{res,r}^2 \quad (2.102)$$

à laquelle on a ajouté la variance turbulente des ordres radiaux  $14 \rightarrow \infty$  (donnée au paragraphe 1.2)

$$\sigma_{res}^2 = \sigma_{res,tot}^2 = \sigma_{res,1:13}^2 + \sum_{r=14}^{\infty} \sigma_{tur,r}^2 \quad (2.103)$$

$$\simeq \sum_{r=1}^{13} \sigma_{res,r}^2 + 0.458 (14)^{-\left(\frac{5}{3}\right)} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\left(\frac{5}{3}\right)}. \quad (2.104)$$

On a présenté dans nos résultats de simulation soit directement la variance de phase résiduelle soit l'énergie cohérente de la phase résiduelle, égale à  $\exp(-\sigma_{res}^2)$  et qu'on assimile au Rapport de Strehl [RS], ce qui est vrai dans une bonne approximation au moins dans les cas de bon RS.

### 2.7.1.6 Notion de vitesse de vent équivalente

On a vu avec l'équation (2.90) que le modèle de turbulence AR1 du filtre de Kalman ne dépend finalement que des coefficients  $a_i$ . Pour permettre un calcul systématique des  $a_i$  à partir de cette

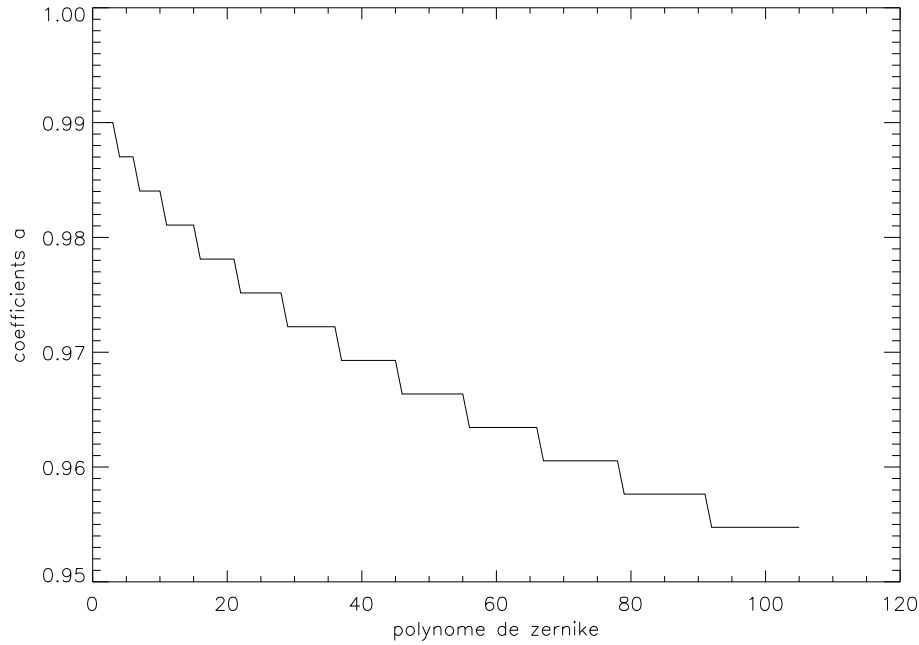


FIG. 2.7 – Valeurs des coefficients  $a_i$  en fonction du mode de Zernike dans le modèle de turbulence choisi pour les simulations numériques.

définition, on fixe la loi qui relie les  $a_i$  à la loi en  $(r + 1)$ , avec  $r$  l'ordre radial, c'est-à-dire l'équation (2.28). Il ne reste alors plus qu'à choisir le  $a_1$ .

Le choix du  $a_1$  doit être fait pour être représentatif d'une turbulence Taylor. D'où la nécessité de relier les valeurs de  $a_1$  à un paramètre physique. On a vu au paragraphe 2.2.2, équation (2.23), que les  $a_i$  règlent la vitesse de décorrélation d'un modèle AR1. Le paramètre qui peut correspondre dans une turbulence Taylor serait alors la vitesse de vent. Plus précisément, le paramètre pertinent est le rapport  $V/D$  avec  $V$  la vitesse de vent et  $D$  le diamètre du télescope. En effet (voir le paragraphe 1.1), la fréquence de coupure d'une turbulence Taylor est proportionnelle à  $V/D$ . On définit, pour un coefficient  $a_1$  donné, un  $V/D$  équivalent. Cette correspondance nous permettra ensuite de choisir un cas de simulation réaliste. On a choisi de définir la notion de vitesse de vent équivalente comme suit :

*Si une commande IGMO appliquée à une turbulence AR1 donne une variance de phase résiduelle  $\sigma_{res}^2$ , on appelle vitesse de vent équivalente le  $(V/D)_{eq}$  tel qu'un IGMO appliqué à une fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{T}$  à une turbulence Taylor  $(V/D)_{eq}$  donne la même variance de phase résiduelle  $\sigma_{res}^2$  dans les mêmes conditions de Rapport signal-à-bruit sur l'analyseur et de  $\frac{D}{r_0}$  de la turbulence.*

On choisit dans nos simulations  $a_1$  tel que le  $(V/D)$  équivalent précédemment défini soit égal à  $(V/D)_{eq} = 2$  Hz à une fréquence d'échantillonnage  $f_{ech} = \frac{1}{T} = 100$  Hz. Les valeurs de  $a_i$  qui en résultent sont présentées en figure 2.7.

Pour calculer cette valeur de  $a_1$ , nous avons fait tourner la commande IGMO sur les deux générateurs de turbulence, Taylor et AR1 et nous avons cherché le  $a_1$  qui égalise les  $\sigma_{res}^2$ . On peut mentionner

le fait que la turbulence générée à partir du modèle AR1 n'a pas de grande échelle ( $L_0 = \infty$ ) puisque ses statistiques spatiales sont purement Kolmogorov alors que la turbulence Taylor a une grande échelle fixée par la taille de l'écran de phase simulé. Les deux générateurs ont donc des statistiques spatiales différentes. La comparaison faite entre les deux pour déterminer un  $V/D$  équivalent est donc biaisée. Or l'influence de la grande échelle n'est sensible que sur les premiers ordres. Pour comparer les deux générateurs de turbulence et obtenir une relation entre  $\{a_1\}$  et vitesse de vent équivalente qui ait un sens, il suffit donc de ne pas prendre en compte les premiers modes.

Nous avons calculé la variance de phase résiduelle mode à mode avec une commande de type IGMO dans les deux cas de turbulence. Nous avons ensuite comparé les variances de phase résiduelles totales, hors tilt, et cherché  $a_1$  tels que  $\sigma_{res,i=4:\infty}^2(\text{AR1}, \{a_i\}) = \sigma_{res,i=4:\infty}^2(\text{Taylor}, V/D = 2\text{Hz}, f_{ech} = 100\text{Hz})$ .

Il faut noter ici que l'équivalence ne tient que pour une fréquence d'échantillonnage donnée. On a vu en effet au paragraphe 2.2.2 que le comportement des modèles de turbulence en fonction de la bande passante et donc de la fréquence d'échantillonnage est différent. La notion de vitesse de vent équivalente a été définie pour s'assurer de la pertinence physique de nos modélisations et leur donner un sens physique.

Les choix d'un  $(V/D)_{eq} = 2 \text{ Hz}$  et d'une fréquence d'échantillonnage  $f_{ech} = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}$  proviennent tout d'abord du souhait de se positionner vis-à-vis des travaux précédents et notamment de ceux de Caroline Dessenne. Nous avons souhaité situer les performances de notre approche par rapport à celles qu'elle avait obtenues. Cela correspond de plus à un cas expérimental réaliste, quoiqu'un peu lent pour ce qui est de la fréquence d'échantillonnage (500 Hz pour NAOS). L'ordre de grandeur, en tout cas, est conservé. Nous présenterons également, pour comparaison, des résultats à d'autres fréquences d'échantillonnage.

### 2.7.2 Résultats de simulation, comparaison entre filtrage de Kalman et IGMO

Nous allons maintenant comparer les performances d'un contrôle constitué d'un filtre de Kalman et d'une commande à réponse pile avec celles d'une commande IGMO, dans les conditions de simulation précisées au dessus.

Il faut noter ici que les gains optimaux de l'intégrateur obtenus par l'approche IGMO ont été seuillés à 0.5. C'est ce qui est généralement fait dans les systèmes existants et cela a pour objectif d'assurer la stabilité du système. En effet, un intégrateur à gain  $g$  et à retard de deux trames est théoriquement stable jusqu'à  $g = 1$  mais la stabilité est très peu robuste pour  $g = 1$ . La moindre erreur de calibration ou vibration du banc peut alors faire diverger le système. Pour éviter ce problème, il faut choisir une marge de robustesse, c'est-à-dire un  $g$  maximal qui assure un certain degré de robustesse à la stabilité. Le gain maximal est généralement choisi égal à 0.5 [Des98]. Le filtrage de Kalman, cela a déjà été dit, assure quant à lui la stabilité de l'asservissement tant que le modèle choisi pour l'évolution de la phase turbulente ne diverge pas lui-même. Le problème de stabilité ne se pose pas pour l'approche que nous proposons. Il n'y a donc pas de considération de robustesse à la stabilité à tenir. Le système est stable et cette stabilité est robuste tant le modèle choisi dans le filtre de Kalman est stable. Même si ce modèle s'écarte un peu de celui de la turbulence atmosphérique, l'asservissement ne divergerait pas. Les performances seraient moins bonnes mais le système resterait stable, car le filtre de Kalman est connu pour avoir une bonne marge de stabilité face aux erreurs de

modèle.

La première conséquence de ces considérations liées à la stabilité du système va se sentir pour les forts rapports signal-à-bruit. En effet, pour un grand RSB, l'approche IGMO a tendance à faire tendre le gain de l'intégrateur vers 1. Nous avons déjà discuté de ce point au paragraphe 1.3. Pour des cas de fort RSB, l'approche IGMO est donc par construction "bridée". Le gain effectif n'est pas le gain optimal, il est seuillé à 0.5. On peut donc d'ores et déjà s'attendre à un gain important de notre approche dans ce cas-là.

Bien-sûr, pour de très forts RSB, l'approche IGMO donne déjà de bons résultats en terme de rapport de Strehl et il peut paraître alors superflu de s'attacher à obtenir un résultat encore meilleur. On peut déjà anticiper sur la suite en disant que dans certains systèmes, notamment dans le cas de l'XOA (OA haute performance), ce gain peut être souhaitable.

Dans un cas inverse de très faible RSB, on s'attend à ce que l'approche Kalman assure un gain vis-à-vis de l'IGMO. Cette approche utilise en effet en plus des mesures une connaissance *a priori* sur la phase turbulente, sa statistique spatiale et son évolution temporelle. L'approche que l'on propose est capable d'utiliser au mieux les mesures pour retrouver la phase turbulente la plus probable, en tenant compte des connaissances *a priori* dont on dispose.

En plus de ces aspects de simple estimation de la phase turbulente, l'approche par filtrage de Kalman contient un prédicteur, qui permet d'anticiper le décalage de  $2T$  entre la mesure et la correction. L'IGMO ne contient pas de prédicteur. Il y a donc là un gain supplémentaire de notre approche sur l'IGMO. Ce gain va bien-sûr dépendre de la corrélation entre les phases turbulentes à  $n$  et à  $n+2$ . Plus ces phases seront corrélées et moins la prédiction sera nécessaire. On voit bien que, si la turbulence n'évolue pas du tout, c'est-à-dire si  $\phi_n^{tur} = \phi_{n+2}^{tur}$ , aucune prédiction n'est nécessaire,  $\hat{\phi}_{n+2}^{tur} = \hat{\phi}_n^{tur}$ . À l'inverse, si la turbulence évolue beaucoup entre deux pas d'échantillonnage, l'écart de performance sera important entre une approche prédictive et une non-prédictive. On s'attend donc à ce que l'approche Kalman que l'on propose apporte un gain d'autant plus grand que la vitesse d'évolution de la turbulence est grande à  $f_{ech}$  fixée ou, en d'autres termes, d'autant plus que la fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  est faible, pour une vitesse de vent fixée. C'est le résultat qu'obtenait déjà Caroline Dessenne dans son étude d'un prédicteur modal [DMR98]. La figure 2.8 est d'ailleurs proche de celle qu'elle obtenait pour un prédicteur modal (figure II.2.8 dans [Des98]).

On a défini, pour quantifier le gain de notre approche sur l'approche IGMO, le facteur de gain  $\rho$  :

$$\rho = \frac{\sigma_{res}^2(\text{IGMO}) - \sigma_{res}^2(\text{Kalman})}{\sigma_{res}^2(\text{IGMO})} = 1 - \frac{\sigma_{res}^2(\text{Kalman})}{\sigma_{res}^2(\text{IGMO})} \quad (2.105)$$

qui tend vers 0 quand  $\sigma_{res}^2(\text{Kalman}) = \sigma_{res}^2(\text{IGMO})$  et vers 1 quand  $\sigma_{res}^2(\text{Kalman}) = 0$ . On a tracé en figure 2.8 le facteur  $\rho$  pour un RSB variant de 5 à 50 pour deux fréquences d'échantillonnage, 50 Hz et 100 Hz. La simulation numérique confirme les résultats que nous avons anticipés.  $\rho$  augmente avec le RSB et diminue quand  $f_{ech}$  augmente. Pour une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz, on trouve un gain de 0.20 en variance à  $RSB = 5$  et de 0.31 à  $RSB = 50$ . Pour  $f_{ech} = 100$  Hz,  $\rho = 0.16$  à  $RSB = 5$  et  $\rho = 0.25$  à  $RSB = 50$ .

On a également présenté en figure 2.9 la phase résiduelle mode à mode pour des RSB de 10 et de 50 et une fréquence d'échantillonnage de 100 dans les cas Kalman et IGMO. On confirme par ces courbes que l'écart entre les deux approches est plus important quand le RSB est plus grand. On voit également que l'écart entre les deux courbes est d'autant plus grand que l'ordre du mode

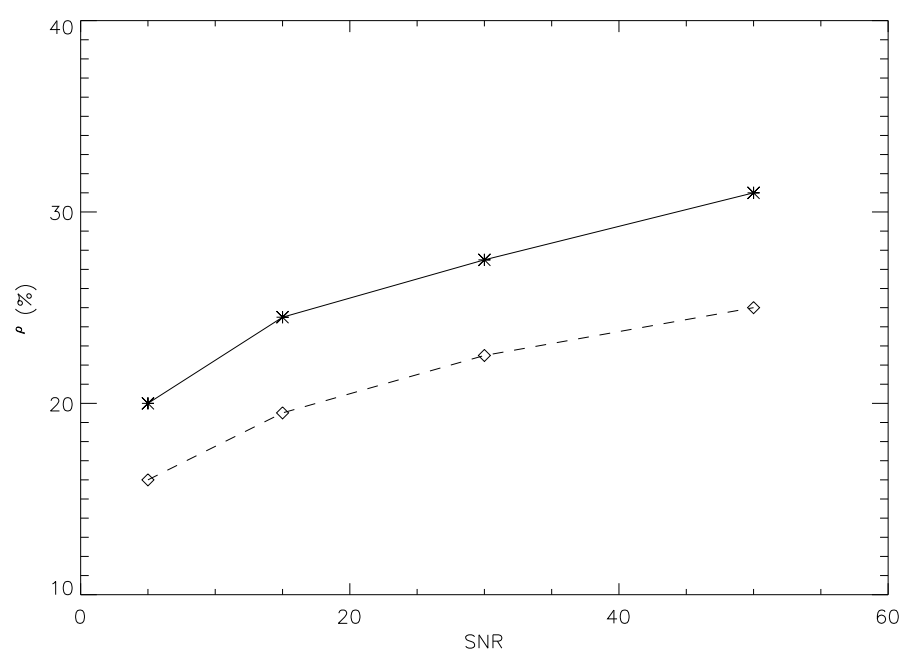


FIG. 2.8 – Évolution du facteur  $\rho$  en pourcentage en fonction du RSB et pour deux fréquences d'échantillonnage, 50 Hz [trait plein] et 100 Hz [tirets].



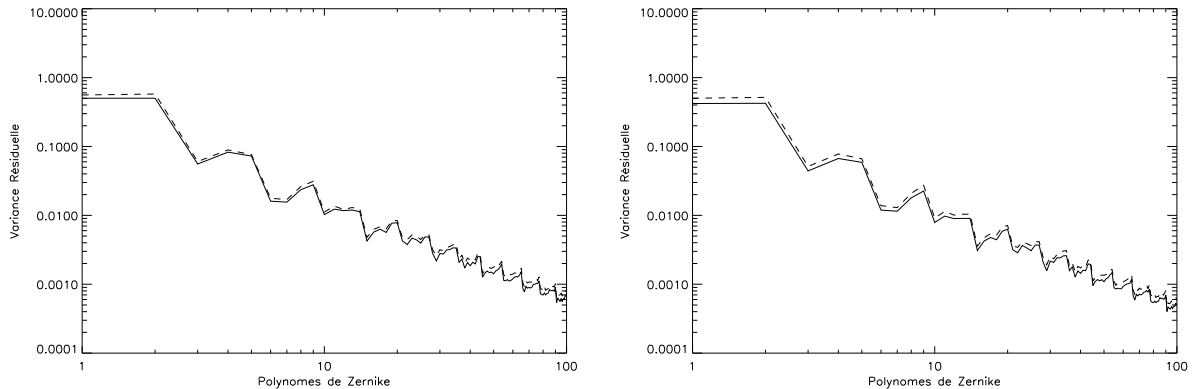


FIG. 2.9 – Phase résiduelle mode à mode pour un RSB de 10 (figure de gauche) et 50 (figure de droite) et une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. La performance de l'approche par filtre de Kalman est représentée en trait plein et l'approche IGMO en tirets.

est élevé. Si l'on se souvient que la fréquence de coupure de la DSP turbulente est d'autant plus grande que l'ordre du mode est élevé, on comprend que cette deuxième constatation s'explique par l'augmentation du gain quand la fréquence d'échantillonnage du système diminue. Plus la turbulence évolue vite par rapport au système, plus il est important d'effectuer une prédiction optimisée. Les hauts ordres radiaux évoluant plus vite que les bas ordres, on distingue mieux sur eux le gain apporté par la prédiction incluse dans le filtre de Kalman que nous avons défini.

### 2.7.2.1 Convergence temporelle et utilisation du filtre asymptotique.

On a précisé au paragraphe 2.7.1.4 que l'on avait utilisé le filtre de Kalman dans sa version asymptotique. Le calcul fait une fois pour toutes avant de fermer la boucle des matrices  $\mathbf{C}_\infty$ ,  $\mathbf{L}_\infty$  et  $\mathbf{H}_\infty$  et leur utilisation dès la première itération permet un gain de temps considérable et autorise une mise en place du filtrage de Kalman en temps réel. Nous allons montrer ici l'effet de l'utilisation des matrices asymptotiques par rapport au filtre optimal idéal qui utilise les matrices  $\mathbf{C}_{n+1/n}$ ,  $\mathbf{L}_n$  et  $\mathbf{H}_n$ .

Nous présentons en figure 2.10 la différence de variance de phase résiduelle itération par itération entre un filtrage optimal et asymptotique pour un RSB de 10. On voit que dans les deux cas la différence se fait sur les premières itérations. Très vite, le filtre asymptotique rejoint le filtre optimal, au bruit numérique près. Il suffit donc en pratique d'attendre quelques dizaines d'itérations avant d'intégrer dans la voie imagerie. Pour mémoire, quelques dizaines d'itérations, à 100 Hz, représentent quelques dixièmes de seconde.

Cette caractéristique du filtre de Kalman asymptotique que nous utilisons est intéressante, parce qu'en pratique on aura tout intérêt à utiliser effectivement le filtre asymptotique, qui permet d'aller plus vite dans le calcul des nouvelles tensions et donc de limiter l'erreur temporelle ou, d'un autre point de vue, de limiter la puissance de calcul nécessaire.

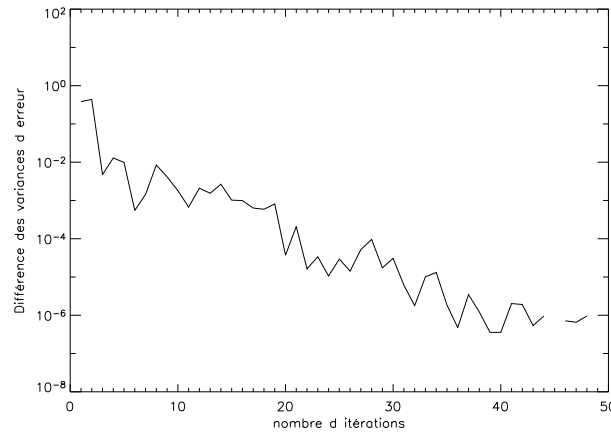


FIG. 2.10 – Evolution de la différence entre les variances de phase résiduelle en fonction du temps (en nombre d'itération) pour un filtrage de Kalman optimal et asymptotique pour un  $V/D$  de 2 Hz, une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz et un RSB de 10.

### 2.7.2.2 Vérification du comportement en fonction de la fréquence d'échantillonnage

L'erreur temporelle d'un système d'OA à l'entrée duquel on met une turbulence AR1 se comporte différemment de celle d'un système d'OA à l'entrée duquel on met une turbulence Taylor, et ce en raison de la différence des DSP turbulentes (voir le paragraphe 2.2.2).

Dans le premier cas (AR1) l'erreur temporelle du tilt est inversement proportionnelle à la bande passante et donc, dans une bonne approximation, à la fréquence d'échantillonnage. Dans le second cas (Taylor) elle est inversement proportionnelle à  $f_{ech}^2$ .

On a tracé en figure 2.11 la variance de phase résiduelle en fonction du mode de Zernike pour un filtrage de Kalman à 30 [trait plein] et 300 Hz [tiret-point]. La turbulence est générée avec le modèle AR1 et le RSB est choisi égal à 10. On voit l'effet de l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage et on retrouve entre les variances résiduelles du tilt le facteur  $\frac{f_{ech,max}}{f_{ech,min}} = \frac{300}{30} = 10$ . On peut noter que le comportement en fonction de  $f_{ech}$  avait été montré analytiquement dans le cas d'un intégrateur. On le retrouve pour la commande que l'on propose.

On voit aussi sur la figure l'effet de l'utilisation du filtre asymptotique de Kalman [tirets] en fonction du mode. La différence est négligeable.

### 2.7.2.3 Robustesse aux erreurs de modèle de turbulence

Afin de s'assurer que le filtrage de Kalman comme on l'a défini ne perd pas son sens quand on l'applique à une turbulence de type Taylor, on a estimé par simulation les performances de la commande que l'on propose sur une turbulence Taylor. On a choisi un  $V/D = 2$  Hz et une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. La turbulence a été générée de la même façon qu'au paragraphe 2.7.1.1 lorsqu'on a choisi une vitesse de vent équivalente. En dehors du générateur de turbulence, les conditions de simulation ont été prises les mêmes que précédemment.

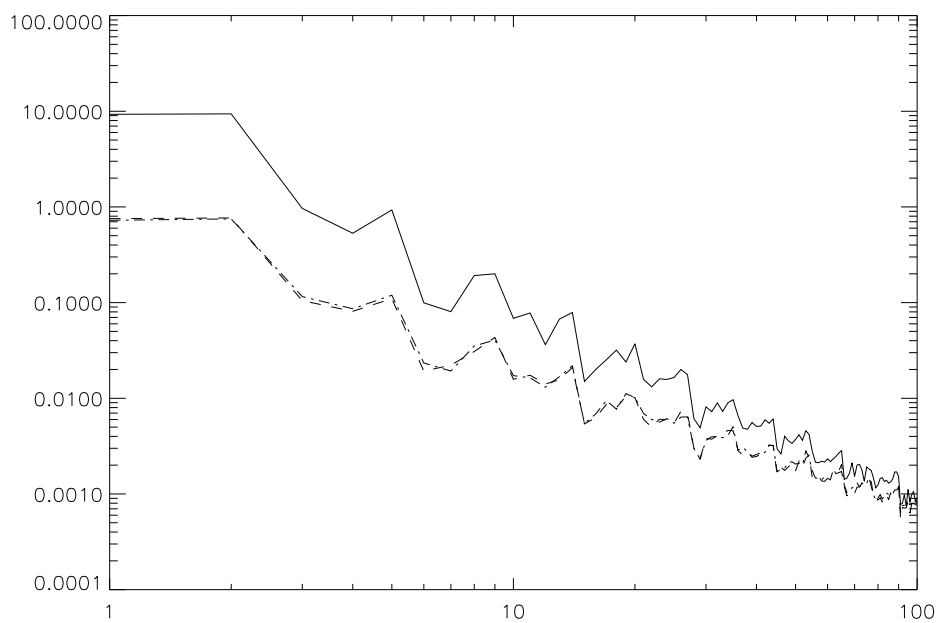


FIG. 2.11 – Variance de phase résiduelle en fonction du mode de Zernike pour un filtre de Kalman optimal à une fréquence d'échantillonnage de 300 Hz [tiret-point], un filtrage de Kalman asymptotique à une fréquence d'échantillonnage de 300 Hz [tirets] et un filtrage de Kalman asymptotique à une fréquence d'échantillonnage de 30 Hz [trait plein]. Le  $V/D$  est de 2 Hz et le RSB de 10.

On a alors comparé les performances du filtrage de Kalman appliqué à la turbulence Taylor avec celles obtenues précédemment avec un générateur de turbulence AR1. Il faut se souvenir que dans les deux cas, le filtre de Kalman est le même, calculé à partir des équations d'évolution du modèle turbulent AR1.

On a observé une variation relative du gain  $\rho$  inférieure à 5%, ce qui est l'ordre de grandeur de l'erreur de convergence. Le gain apporté par le filtrage de Kalman vis-à-vis de l'approche IGMO est donc conservé malgré l'écart entre le modèle de turbulence et le générateur. Ceci montre que le système commandé réagit bien à une turbulence de type Taylor. Cela quantifie déjà un paramètre important qui est la résistance et la robustesse du filtre tel qu'on l'a défini aux erreurs de calibrations et aux erreurs de modèle. On montre ici par cette simulation que la connaissance très exacte des conditions de turbulence n'est pas critique pour l'usage du filtre de Kalman. C'est primordial puisque, dans un vrai système, la connaissance que l'on a des valeurs de paramètres comme la vitesse de vent ou le  $r_0$  est entachée d'erreurs de mesure. L'utilisation d'*a priori* inexacts n'induit pas de perte de performance significative. Cette remarque sera reprise dans le paragraphe 3.2 où l'on montrera dans le cas OAMC que l'estimation de la phase turbulente est moins sensible à la connaissance précise des *a priori* qu'aux variations de conditions de turbulence elles-mêmes.

### 2.7.3 Un cas pseudo-OAMC

Au delà de l'intérêt que l'on vient de prouver d'un filtrage de Kalman pour l'OA classique, l'objectif final de cette étude est bien-sûr l'optimisation d'un système d'OAMC. On sait en effet, suite à des études précédentes [FCR<sup>+</sup>01], [Fus00], que les systèmes d'optique adaptative multiconjuguée ont beaucoup à gagner à utiliser au maximum l'information *a priori* dont on dispose, en particulier pour ce qui concerne l'estimation des modes mal vus, introduits au paragraphe 1.2.2. Ces modes limitent considérablement les performances d'un système d'OAMC [FCR<sup>+</sup>01]. La seule façon de s'en affranchir est de les estimer.

Les modes non vus correspondent aux modes de valeur propre nulle dans la base du système multiconjugué. On appelle base propre du système celle dans laquelle  $\left(\mathbf{M}_{MD}^{EG}\right)^T \mathbf{M}_{MD}^{EG}$  est diagonale, avec  $\mathbf{M}_{MD}^{EG}$  la matrice qui fait passer des tensions des miroirs aux mesures de pentes des analyseurs (définie en 1.2.2). Dans cette base, les valeurs propres représentent la mesurabilité des modes propres associés. On sent bien alors qu'il n'y a pas de rupture franche entre des modes qui seraient non vus et les autres qui seraient totalement vus. Il y a une gradation dans la mesurabilité, la "visibilité", des modes propres du système. Plutôt que de parler de modes non vus, on préférera alors parler de modes mal vus.

Un mode mal vu correspond à des perturbations présentes sur différentes couches qui se compensent dans les directions d'analyse et pas ailleurs, comme on le voit sur la figure 1.17, présentée au paragraphe 1.2.2. Il s'agit donc d'un mode qui couple différentes altitudes de la turbulence et n'est pas mesuré. La turbulence atmosphérique est distribuée en altitude selon un profil dit de  $C_n^2$  qui concentre la majeure partie de l'énergie dans les couches les plus proches du sol (voir paragraphe 1.1). On voit bien alors qu'un mode mal vu correspond au couplage de perturbations dans une basse et une haute couche, donc d'un mode très énergétique et d'un autre très peu énergétique. Filtrer un tel mode revient à perdre une partie de l'énergie correspondant au mode très énergétique. D'où une dégradation des

performances du système.

L'objet de cette section est de montrer que l'approche optimale que nous proposons pourra gérer le problème des modes mal vus, qui nous semble être au centre de la problématique de l'OAMC. Pour ce faire, il nous a semblé instructif et pédagogique d'introduire artificiellement un mode mal vu dans un cas très simple, en utilisant les outils de simulation développés pour l'Optique Adaptative Classique. Nous allons montrer par ce moyen que l'utilisation du filtre de Kalman permet d'estimer et de corriger les modes mal vus.

Pour introduire artificiellement un mode mal vu dans la simulation d'Optique Adaptative Classique, nous avons modifié la matrice de mesure  $\mathbf{D}$ . Jusqu'à présent,  $\mathbf{D}$  avait été prise égale à la matrice identité. La matrice  $\mathbf{D}$  modifiée pour le cas pseudo-OAMC s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

où les facteurs  $\frac{1}{2}$  sont sur les lignes et colonnes correspondant aux modes de Zernike 4 et 17 (3<sup>e</sup> et 16<sup>e</sup> lignes et colonnes puisque  $\mathbf{D}$  ne prend pas en compte le mode piston). Pour ces deux modes, la mesure est donc :

$$Y_n^{(4)} = \frac{1}{2} (\phi_n^{res,4} + \phi_n^{res,17}) + w_n^{(4)}, \quad (2.107)$$

$$Y_n^{(17)} = \frac{1}{2} (\phi_n^{res,4} + \phi_n^{res,17}) + w_n^{(17)}, \quad (2.108)$$

où l'on se souvient que  $\sigma_{w(4)}^2 \gg \sigma_{w(17)}^2$ . Pour illustration, les polynômes de Zernike 4 et 17 sont représentés en figure 2.12.

Le calcul des valeurs propres et vecteurs propres associés à  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  donne facilement les valeurs propres 0 associée au vecteur propre  $\Phi_- = \frac{1}{2}(Z_4 - Z_{17})$  et 1 associée au vecteur propre  $\Phi_+ = \frac{1}{2}(Z_4 + Z_{17})$ . Le vecteur propre  $\Phi_-$  est donc un mode non vu.

Dans une turbulence Kolmogorov comme celle que nous utilisons, les bas ordres sont très énergétiques et les hauts ordres peu énergétiques. On a donc ici un mode non vu généré par le mélange d'un mode énergétique et d'un mode peu énergétique, ce qui constitue une bonne analogie au cas OAMC. L'ordre des modes couplés ici est l'analogue, en OAMC, de l'altitude de la couche turbulente. C'est en ce sens que l'on peut vraiment dire qu'il s'agit d'un cas de mode mal vu similaire au problème OAMC.

Dans l'approche IGMO, on commence par passer dans la base des modes propres du système, qui diagonalise  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ . L'IGMO va ensuite avoir tendance à filtrer totalement le mode  $\Phi_-$ , associé à une valeur propre nulle, et pas du tout le mode  $\Phi_+$ , c'est-à-dire à appliquer, dans la base propre du

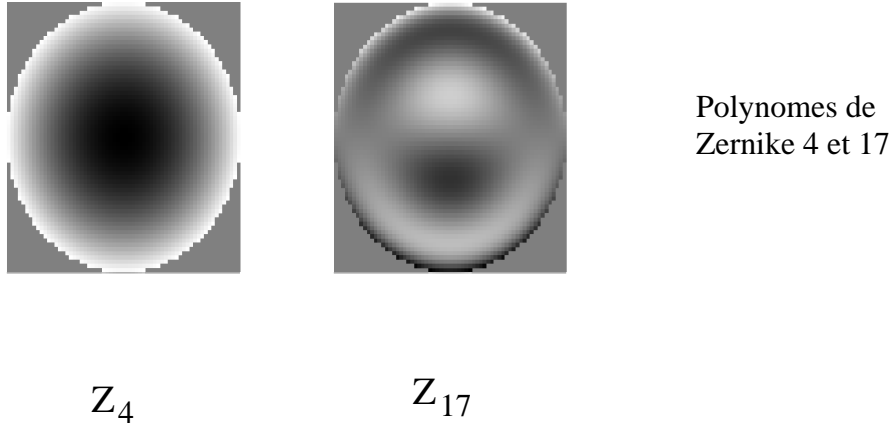


FIG. 2.12 – Représentation pour illustration des polynômes de Zernike numéros 4 et 17.

système, les gains 0 et 1. Cela revient à considérer que, dans la décomposition de la phase résiduelle sur la base propre, l'IGMO estime les coefficients des vecteurs  $\Phi_+$  et  $\Phi_-$  par

$$\hat{\phi}_+ = 1. \left( \frac{1}{2} (Y^{(4)} + Y^{(17)}) \right), \quad (2.109)$$

$$\hat{\phi}_- = 0. \left( \frac{1}{2} (Y^{(4)} + Y^{(17)}) \right). \quad (2.110)$$

Une fois ces modes estimés sur la base propre du système, on repasse dans l'espace des modes turbulents et on obtient

$$\hat{\phi}^{res,4} = \hat{\phi}^{res,17} = \frac{1}{2} (Y^{(4)} + Y^{(17)}) = \frac{1}{2} (\phi^{res,4} + \phi^{res,17}) + \frac{1}{2} (w^{(4)} + w^{(17)}). \quad (2.111)$$

L'erreur d'estimation de la phase turbulente peut être alors estimée pour les deux modes 4 et 17 en raisonnant en statique :

$$\phi^{tur,4} - \hat{\phi}^{tur,4} \simeq \phi^{tur,4} - \frac{1}{2} (\phi^{tur,4} + \phi^{tur,17}) \quad (2.112)$$

$$\simeq \frac{1}{2} (\phi^{tur,4} - \phi^{tur,17}), \quad (2.113)$$

$$\phi^{tur,17} - \hat{\phi}^{tur,17} \simeq \phi^{tur,17} - \frac{1}{2} (\phi^{tur,4} + \phi^{tur,17}) \quad (2.114)$$

$$\simeq \frac{1}{2} (\phi^{tur,17} - \phi^{tur,4}). \quad (2.115)$$

La variance de l'erreur d'estimation pour les deux modes est donc, si l'on se souvient que les deux modes 17 et 4 sont non corrélés

$$\sigma_{err,4}^2 \simeq \sigma_{err,17}^2 \simeq \frac{1}{4} (\sigma_{tur,4}^2 + \sigma_{tur,17}^2) \simeq \frac{1}{4} \sigma_{tur,4}^2, \quad (2.116)$$

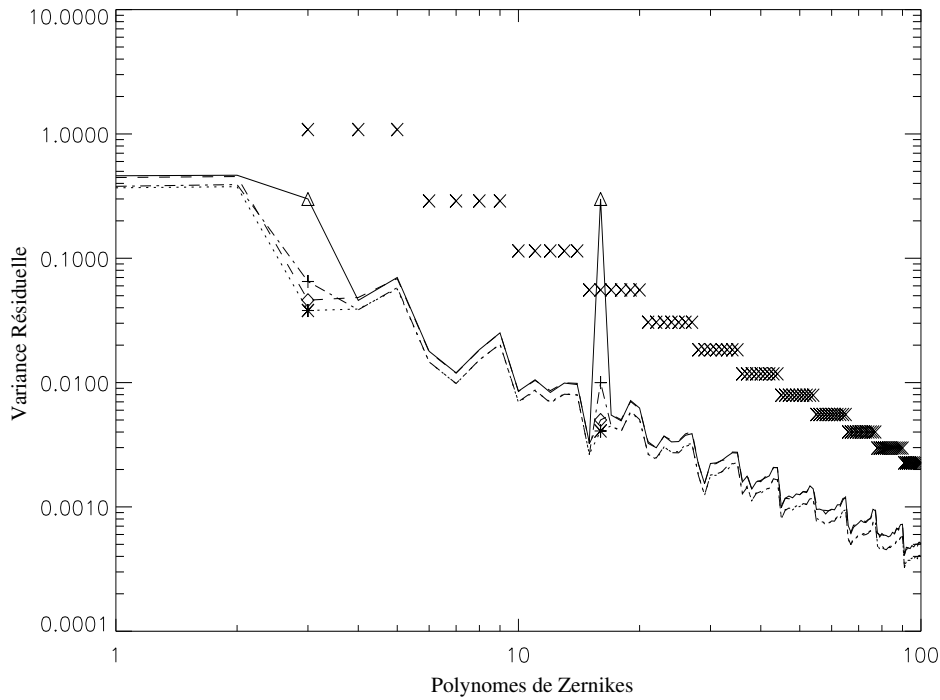


FIG. 2.13 – Variance de la phase résiduelle en radians carrés avec modes mal vus pour un filtrage de Kalman [tiret-point] et une commande IGMO [trait plein] et sans mode mal vu pour un filtrage de Kalman [pointillés] et une commande IGMO [tirets].

puisque  $\sigma_4^2 \gg \sigma_{17}^2$ .

Nous avons choisi de simuler ce cas pseudo-OAMC pour un RSB de 50, afin de concentrer notre attention sur l'estimation des modes mal vus plutôt que sur le débruitage, un  $\frac{D}{r_0}$  de 10 et une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz.

On trouve bien le résultat prévu sur la figure 2.13 où la variance de phase résiduelle en moyenne sur le temps est représentée en fonction du mode, pour l'approche Kalman (trait discontinu) et l'IGMO (trait plein). L'approche Kalman est meilleure pour tous les modes et notamment pour les deux modes 4 et 17. L'utilisation des *a priori* spatiaux et temporels permet en effet d'estimer au mieux les valeurs de  $\phi^{tur,4}$  et  $\phi^{tur,17}$ . On a également tracé la variance de phase turbulente mode à mode et on voit qu'on retrouve le résultat prévu pour ce qui est de la valeur de  $\sigma_{err,4}^2$  et  $\sigma_{err,17}^2$ . On a représenté également les variances résiduelles pour les approches Kalman et IGMO dans le cas sans mode mal vu, pour voir l'erreur qu'introduit la présence d'un mode mal vu. L'approche Kalman perd un peu quand on introduit un mode mal vu, mais beaucoup moins que l'IGMO.

Pour tous les autres modes, l'écart observé entre les deux approches est dû au gain de l'approche Kalman déjà observé en 2.7.2. La performance mode à mode du filtrage de Kalman est un peu meilleure ici que celle obtenue en figure 2.11 où le rapport signal-à-bruit était moins bon, il était de 10. La comparaison des deux courbes permet d'ailleurs de voir que le filtrage de Kalman permet

un bon débruitage puisqu'on perd assez peu mode à mode en passant d'un RSB de 50 à un RSB de 10.

L'introduction d'un mode non vu telle qu'on l'a présentée peut sembler un peu artificielle. Elle constitue en réalité une bonne analogie avec le cas multiconjugué et permet pour la première fois d'illustrer la capacité d'estimation des modes non vus par le filtrage de Kalman, ce qui sera un point crucial dans le cas OAMC.

## 2.8 Application à la XAO, prise en compte de divers paramètres

Les systèmes d'Optique Adaptative Classique permettent déjà une très bonne correction de la phase turbulente. Les systèmes les plus performants donnent un rapport de Strehl de l'ordre de 75%. Pour certaines applications, un RS plus élevé est nécessaire, par exemple pour les systèmes qui couplent une Optique Adaptative avec un coronographe comme les projets de détection d'exoplanètes, par exemple le projet Planet Finder [MOB<sup>+</sup>02], [LALH<sup>+</sup>01] [MLB<sup>+</sup>02] [MFLBed]. En effet, la turbulence dégrade considérablement la performance du coronographe. Il est nécessaire pour de tels systèmes d'obtenir un RS supérieur à 90%.

Pour arriver à un tel résultat, il faut déterminer et prendre en compte toutes les sources d'erreur. Une commande souple et basée sur une description explicite du système comme l'approche que nous proposons, permet d'introduire facilement dans le modèle des paramètres supplémentaires nécessaires à corriger comme par exemple l'effet d'aliasing ou une vibration du télescope. La flexibilité du filtrage de Kalman permettrait également de prendre en compte facilement des phénomènes imprévus, tant qu'on dispose d'une marge de manœuvre suffisante en terme de mémoire et de vitesse de calculateur.

### 2.8.1 Aliasing

On a introduit cette notion au paragraphe 1.2. Il s'agit d'un repliement des très hautes fréquences spatiales non mesurées sur les fréquences accessibles à la mesure. L'aliasing induit une erreur d'estimation sur les plus hautes fréquences spatiales mesurables.

Dans le formalisme que l'on a introduit, cette erreur peut être gérée en introduisant dans le modèle de phase turbulente du filtre de Kalman les fréquences spatiales supérieures à la fréquence maximale mesurée. L'estimateur pourra alors de lui-même discriminer dans les mesures la partie turbulente repliée de la partie non repliée.

Par rapport à l'estimateur et à la commande présentés précédemment, il suffit donc d'augmenter légèrement (de l'ordre de quelques ordres radiaux) la taille des vecteurs de phase turbulente dans  $\mathbf{X}_n$  et d'augmenter en conséquence la taille des matrices  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ .

Un coût très faible permet donc de réduire le problème d'aliasing, négligé en général en OA classique mais qu'il peut être important de prendre en compte dans les systèmes dits d'XAO (Extreme Adaptive Optics).



### 2.8.2 Vibrations du télescope

Pour montrer la souplesse et l'un des intérêts de l'approche Kalman, nous présentons encore un point pour lequel l'approche que nous proposons pourrait permettre des gains considérables.

Au moment de la mise en place de certains systèmes d'OA récents (NAOS), on a observé une perte de Strehl liée à une vibration du télescope qui n'avait pas été sentie jusque-là. En introduisant de façon explicite dans le modèle l'évolution de la phase turbulente et la vibration du système, il est possible de séparer au moment de l'estimation la phase turbulente de l'oscillation et de corriger les deux.

Si l'on a une idée de la fréquence de la vibration, cela peut se faire de la même façon que lorsque nous avons introduit les aberrations statiques dans la commande au paragraphe 2.5.3, avec cette fois une décomposition de phase turbulente non plus comme  $\phi^{tur} + \phi^{cst}$  mais comme  $\phi^{tur} + \phi^{cst} + \phi^{oscil}$  avec  $\phi^{oscil}$  qui suit une fonction sinusoïdale. Il est également possible d'introduire un terme résonnant centré sur une fréquence  $f_0$  et de largeur spectrale  $\Delta f$ .

Si l'on ne connaît pas *a priori* la fréquence de la vibration, il est aussi possible de l'estimer au prix d'un léger accroissement du vecteur d'état. Il reste néanmoins plus efficace et pratique d'estimer à l'avance, sur des données boucle ouverte, la ou les fréquences d'oscillation.

## 2.9 Discussion sur la commande optimale en OA

Nous avons montré dans ce chapitre comment l'utilisation d'un filtre de Kalman basé sur modèle turbulent AR1 pouvait améliorer les performances d'un système d'OA classique. Nous avons expliqué comment le filtrage de Kalman que l'on propose assorti d'une commande à réponse pile assure une estimation et une prédiction optimales de la phase turbulente. Nous avons quantifié le gain vis-à-vis de l'approche dite Intégrateur à Gain Modal Optimisé.

La commande que l'on propose permet de s'affranchir des problèmes de stabilité ou de robustesse que posent les approches antérieures. Le système bouclé est stable tant que le modèle utilisé pour écrire le filtre de Kalman est correct. De plus, les équations qui régissent ce filtrage sont simples et faciles à adapter à un cas concret. On a montré comment introduire dans le modèle d'état des paramètres divers comme la présence d'aberrations statiques, l'effet d'aliasing ou des vibrations de télescope. Si l'on souhaitait traiter d'autres problèmes comme les erreurs de calibration ou la scintillation, il suffirait d'adapter les équations fondamentales, à savoir de trouver le  $\mathbf{X}_n$  et les matrices  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{A}_3$ . L'écriture du filtre prendrait alors la même forme que précédemment, avec ces nouveaux vecteurs et matrices.

On peut évoquer aussi l'adaptabilité du modèle dans le cas où la chronologie des événements est moins simple que celle présentée en figure 2.1. Il peut par exemple arriver, suivant les systèmes, que les nouvelles tensions à appliquer  $\mathbf{u}_n$  ne soient pas disponibles à  $nT$  mais à  $nT + \delta T$ , avec  $\delta T \ll T$ . La solution pour traiter alors le problème avec la même approche que celle que nous proposons est de prendre comme unité de temps dans l'écriture des équations du filtre non plus  $T$  mais  $\delta T$ , avec  $T = K \delta T$ . Dans ce nouveau modèle, les mesures n'arrivent plus au début de chaque intervalle de temps, mais tous les  $K$  intervalles de temps. De même la correction n'est pas constante sur un intervalle de temps mais sur  $K$  intervalles. Cette représentation est équivalente à celle proposée dans ce mémoire, mais elle permet de prendre en compte et de gérer un petit décalage de temps  $\delta T$ . De

la même façon, on traiterait un système où le calcul des tensions  $\mathbf{u}_n$  se ferait au fur et à mesure de l'obtention des nouvelles mesures sous-pupille par sous-pupille en changeant l'unité de temps dans les modèles du filtre de Kalman pour décrire finement les différentes étapes du chronogramme.

Cette grande souplesse du filtrage de Kalman et de la commande que nous proposons nous permettra dans la suite de ce mémoire de l'adapter à un cas beaucoup plus complexe qui est celui de l'Optique Adaptative Multiconjuguée. Tous les avantages et intérêts présentés dans ce paragraphe pourront eux aussi être généralisés au cas OAMC.



## Chapitre 3

# Commande optimale en Optique Adaptative Multiconjuguée

Un système d’Optique Adaptative Multiconjuguée est un système d’Optique Adaptative à plusieurs miroirs conjugués en altitude et plusieurs analyseurs. Le concept de l’OAMC a été proposé pour élargir le champ d’isoplanétisme. Nous l’avons déjà introduit au paragraphe 1.2.2 et nous ne reviendrons pas sur le principe de la multiconjugaison. L’objet de ce chapitre est de définir une commande optimale vis-à-vis de la variance de phase résiduelle dans les directions d’intérêt et d’en présenter une mise en œuvre par simulation numérique.

Nous commençons par introduire au paragraphe 3.1 quelques notions liées au budget d’erreur d’un système d’OAMC. Nous présentons ensuite dans le paragraphe 3.2 une étude de l’influence de la variation du profil de  $C_n^2$  et de l’effet d’une erreur au modèle sur ce paramètre dans la commande optimale statique. Dans des études précédentes, des auteurs [FCR<sup>+</sup>01] [TLLV<sup>+</sup>01] ont en effet proposé un estimateur optimal de la phase turbulente pour un système boucle ouverte statique (présenté au paragraphe 2.6.5). La question de la robustesse des performances de cet estimateur à des erreurs de modèle restait inexplorée et nous montrons au paragraphe 3.2 que cette robustesse est grande. Nous montrons également que les effets de variation des conditions de turbulence sont dominants vis-à-vis des erreurs de modèle. Ce paragraphe reprend une démarche qui avait déjà amené à des résultats préliminaires présentés à Venise en 2001 [CLRB<sup>+</sup>01], pour la conférence *Beyond conventional adaptive optics*. Les résultats présentés ici sont plus complets et se structurent autour d’une discussion sur le budget d’erreur d’un système OAMC. On trouvera l’article de conférence en annexe D.

Nous présenterons ensuite au paragraphe 3.3 l’application au cas OAMC dynamique de l’approche par filtrage de Kalman développée au chapitre précédent en s’appuyant sur l’article *Optimal control in classical and multiconjugate adaptive optics* soumis à la revue JOSAA.

### 3.1 Budget d’erreur en OAMC

Le budget d’erreur d’un système d’OAMC est semblable à celui d’un système d’OA classique. Il peut s’écrire en première approximation comme la somme de plusieurs termes d’erreurs, les erreurs de correction, les erreurs d’analyse et les erreurs temporelles, liées au retard entre mesure et application

de la commande,

$$\sigma_{err}^2 = \sigma_{err}^2 (correction) + \sigma_{err}^2 (analyse) + \sigma_{err}^2 (temporelle). \quad (3.1)$$

On place tout d'abord dans  $\sigma_{err}^2 (correction)$  les mêmes erreurs que dans le cas classique, à savoir l'erreur dite de sous-modélisation (ou *fitting*), due à l'échantillonnage fini de la correction de la phase turbulente par les actionneurs du miroir déformable [MD]. Un nombre fini d'actionneurs sur le MD ne permet pas de corriger une infinité de fréquences spatiales dans la turbulence. La fréquence maximale corrigée par le MD peut être approximée par  $1/d_{act}$  avec  $d_{act}$  la distance inter-actionneurs.

En OAMC, à cette première erreur de *fitting* s'ajoute une erreur dite de sous-modélisation généralisée (ou *generalized fitting*). Elle correspond à nouveau à une forme d'échantillonnage mais cette fois un échantillonnage du volume par un nombre fini de MD. On présente en figure 3.1 un schéma qui permet de comprendre l'origine du *generalized fitting*. Pour obtenir une phase résiduelle uniforme dans le champ, la correction produite par un point du miroir déformable sur une couche distante de  $\Delta h$  du MD correspond à la moyenne sur un disque de diamètre  $\alpha\Delta h$  de la phase turbulente,  $\alpha$  étant le champ d'intérêt. Plus les couches turbulentes sont éloignées des MD et plus cette erreur est importante. Plus le champ de vue sur lequel on souhaite optimiser la correction est grand et plus l'erreur de *generalized fitting* est élevée. Dans le domaine fréquentiel, la correction appliquée correspond à nouveau à un filtre passe-bas, dont la fréquence maximale corrigée  $f_c$  dépend de l'altitude. Si on optimise la correction en moyenne dans tout le champ en utilisant un MD conjugué à l'altitude  $h_{MD}$ ,  $f_c$  s'exprime en fonction de l'altitude  $h$  comme  $f_c(h) = 1/(\alpha|h - h_{MD}|)$  [REF00]. Si l'on disposait d'autant de miroirs qu'il y a de couches turbulentes et s'ils étaient localisés aux altitudes des couches turbulentes, le *generalized fitting* serait nul. Rigaut montre de plus dans [REF00] que l'erreur de *generalized fitting* ne dépend pas, en première approximation, du diamètre du télescope.

En présentant le résidu de correction de la turbulence en niveaux de gris (le niveau blanc correspond à une correction totale et le niveau noir à une correction nulle) en fonction, sur un premier axe, de l'altitude de la turbulence et sur un deuxième axe de la fréquence spatiale, Roberto Ragazzoni [Rag01] donne une visualisation explicite du phénomène. Dans les couches où les miroirs sont placés, la turbulence est corrigée jusqu'à la fréquence spatiale  $1/d_{act}$ . Plus on s'éloigne de ces couches-là, moins la correction est efficace et plus la fréquence maximale corrigée est faible. On voit dans cette représentation, sur les schémas de la figure 3.2 comment la correction évolue quand on passe de deux à trois MD. Dans le plan fréquence-altitude, on représente par des zones blanches la turbulence corrigée et par des zones grisées la turbulence non corrigée. Plus le gris est foncé et plus il reste d'énergie dans la turbulence résiduelle. On se souvient que la turbulence atmosphérique est plus énergétique à basse fréquence spatiale. Le passage de deux à trois miroirs provoque l'agrandissement du domaine corrigé. Notamment, la zone de la turbulence la plus énergétique, c'est-à-dire la zone des basses fréquences et des basses altitudes, est mieux couverte par la zone corrigée (blanche). Trois miroirs corrigent plus de fréquences turbulentes et plus d'énergie que deux miroirs.

Le deuxième terme d'erreur,  $\sigma_{err}^2 (analyse)$  comporte tout d'abord, de façon très symétrique, une composante identique à celle présente en OA classique. Il s'agit de l'erreur de mesure d'une phase turbulente par un analyseur. Pour un analyseur de type Shack-Hartmann, la mesure échantillonne spatialement le signal par le découpage en micro-lentilles. La fréquence maximale mesurée par un SH peut être approximée par  $1/d_{sspp}$  avec  $d_{sspp}$  la distance entre deux sous-pupilles. Comme pour le terme d'erreur de correction,  $\sigma_{err}^2 (analyse)$  comporte en OAMC un deuxième terme lié à l'aspect

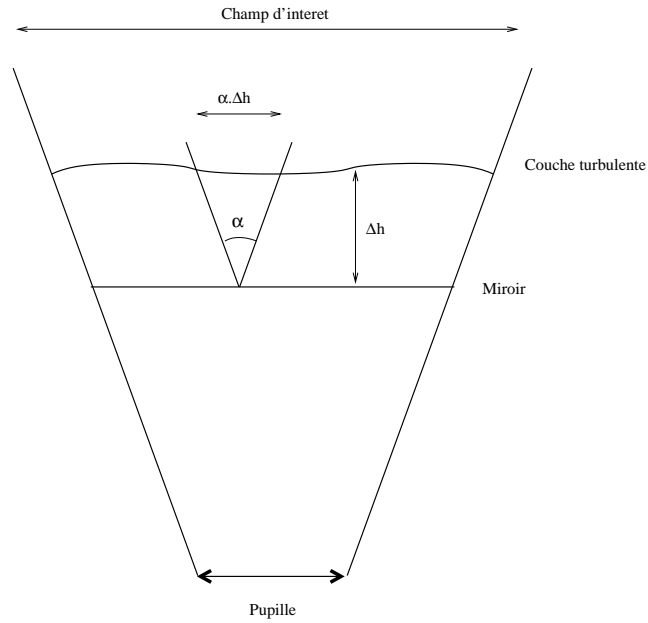


FIG. 3.1 – Schéma de principe de l'erreur de sous-modélisation généralisée.  $\alpha$  est le champ d'intérêt.

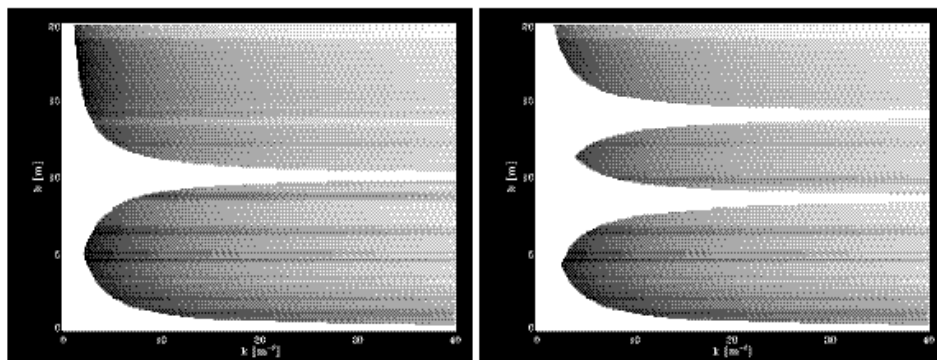


FIG. 3.2 – Résidu de correction (en niveau de gris) en fonction de l'altitude et de la fréquence spatiale pour deux ou trois MD.

volumique de la turbulence atmosphérique. C'est l'erreur de mesure du volume de turbulence, due au nombre limité de directions de mesures, c'est-à-dire d'étoiles guides. Ce terme d'erreur décroît bien-sûr quand le nombre d'EGs augmente sur un champ fixé, c'est-à-dire quand l'écartement des EGs diminue.

En OA Classique, on inverse généralement la matrice d'interaction du système pour passer des pentes mesurées par le SH aux tensions à appliquer. L'erreur provenant du bruit de mesure est propagée à travers cette reconstruction. Cela donne un autre terme d'erreur dans la catégorie des "erreurs d'analyse". C'est une erreur analyse commise sur la phase reconstruite.

En OAMC, à partir des mesures, on souhaite obtenir une estimation de la phase turbulente. Le bruit se propage également lors de la reconstruction de la phase turbulente. Du fait de l'aspect volumique du problème (il faut reconstruire des couches turbulentes à partir de directions de mesures), le bruit se propage de façon différente de l'OA classique, notamment vis-à-vis de la présence de modes mal vus. Si l'on choisit d'estimer ces modes par une SVD, la propagation de bruit "explose" sur ces modes. Si l'on décide de les filtrer, on commet une erreur de reconstruction qui dépend de leur énergie. Il n'y a que l'estimation optimale qui permette de les gérer correctement [FCM<sup>+</sup>00a] [FCMR02]. Cette approche fait le compromis entre propagation du bruit et estimation des modes. Mais elle nécessite l'utilisation d'un modèle de turbulence. Les erreurs dans la modélisation du système et de la turbulence vont générer une erreur sur l'estimation de la phase turbulente. Ce terme d'erreur de reconstruction rentre également dans  $\sigma_{err}^2 (analyse)$ .

On a présenté sur le tableau 3.3 un résumé des différents termes d'erreurs de l'OAMC. Il est à noter que les deux fréquences de coupure de correction sont données dans ce tableau. La fréquence de coupure d'un miroir donnée par l'espace interactionneur et la fréquence de coupure provenant du *generalized fitting*. Cette dernière prend la forme donnée ici quand  $d_{act} = 0$ . Sinon, les deux effets se combinent et la fréquence de coupure effective est le minimum entre les deux.

Il faut également remarquer que l'équation (3.1) est une approximation. Notamment, les termes d'analyse et de correction ne sont pas *de facto* totalement séparables puisqu'on choisi en général les spécifications de l'ASO en fonction de celles du miroir ou inversement. Les termes d'erreur ne s'ajoutent pas forcément. Il y a également d'autres termes d'erreurs possibles que l'on a négligés (effet d'aliasing, scintillation).

## 3.2 Sensibilité aux variations de conditions de turbulence et aux erreurs de modèle

On a déjà parlé au paragraphe 2.7.2.3 de l'erreur générée par une inexactitude sur le modèle temporel d'évolution de la turbulence. On a montré que le filtrage de Kalman tel qu'on le propose est robuste aux erreurs de modélisation de la phase turbulente. On va s'intéresser dans la suite à un autre type d'erreurs de modèle, l'erreur dans la connaissance de la répartition en volume de la turbulence. Cette fois l'étude sera faite dans le cas d'un système statique, au sens défini en section 2.6.5.

On va retrouver un résultat similaire pour ce qui est de la robustesse de l'estimation optimale aux erreurs de modèle et on va montrer que la performance du système est plus sensible aux évolutions du profil de turbulence qu'aux incertitudes sur le modèle. On discutera systématiquement des résultats obtenus en les situant vis-à-vis des différents termes d'erreurs en OAMC.

<i>OA Classique</i>	<i>OAMC</i>	
<i>erreur de fitting</i>	<i>erreur de generalized fitting</i>	
Nombre fini d'actioneurs	Idem + nombre fini de miroirs déformables	<i>Erreurs de correction</i>
Filtre passe bas, fréquence de coupure $1/d_{act}$	Filtre passe bas, fréquence de coupure $1 / ( \alpha  h-h_{DM}  )$ pour $d_{act} = 0$	
Nombre fini de sous pupilles	Idem + nombre fini d'étoiles guides	<i>Erreurs d'analyse</i>
Propagation du bruit	Idem + modes mal vus	

FIG. 3.3 – Résumé des différents termes d'erreur en OAMC.

Il faut rappeler que dans les méthodes d'estimation optimale, MMSE ou MAP statiques tout comme Kalman, on utilise un modèle de turbulence. C'est l'influence de l'écart entre ce modèle et les conditions de turbulence réelles que nous allons étudier ici. Afin d'étudier cette sensibilité aux erreurs de modèle, nous commettrons une erreur volontaire sur la répartition de l'énergie turbulente en altitude (profil de  $C_n^2$ ). Ce paramètre est en effet critique pour l'estimation de la phase turbulente dans le volume et notamment des modes mal vus. Nous avons généré la phase turbulente en utilisant un certain nombre de profils de  $C_n^2$  réalistes. Nous avons ensuite, à partir de la phase mesurée dans les directions d'analyse, estimé la phase turbulente à l'aide d'un MMSE ou d'un MAP, le modèle utilisé pour l'estimation étant basé soit sur le vrai profil de  $C_n^2$  soit sur le profil moyen. La comparaison des performances du système dans les deux cas nous permettra de comprendre l'influence d'une erreur sur le modèle de turbulence et l'influence de l'évolution des conditions de turbulence elle-même.

### 3.2.1 Conditions de simulation

#### 3.2.1.1 La turbulence

On a simulé des écrans de phase de la même façon qu'au paragraphe 2.7.1.1, par la méthode de Mac Glamery [MG76]. Les tirages des écrans de phase sont effectués de façon indépendante les uns des autres. Il n'y a donc pas de considération d'évolution temporelle. Chaque tirage est décorrélié des autres et on traite chaque tirage indépendamment des autres.

La turbulence se compose de 7 couches turbulentes entre 0 et 18 km d'altitude. La force relative de chaque couche turbulente est donnée par le profil de  $C_n^2$ . On a utilisé comme profils de  $C_n^2$  des profils mesurés dans la nuit du 16 au 17 mai 2000 à San Pedro Martir par Remy Avila et Jean Vernin par la technique du scidar généralisé [AV98] [AVC01] [Avi98] [FTV98]. Ces profils nous ont été fournis par Remy Avila, que nous remercions chaleureusement. Les profils mesurés comportaient initialement 40



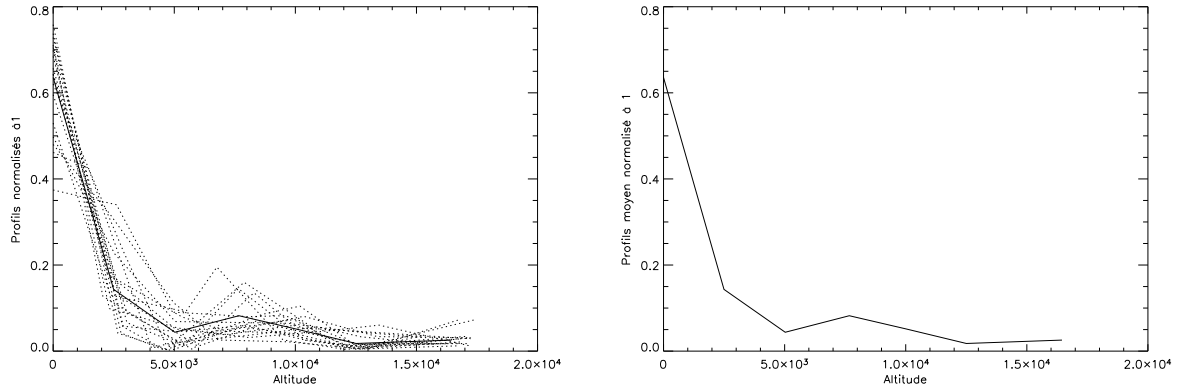


FIG. 3.4 – Figure de gauche : Les profils de  $C_n^2$  normalisés,  $\sum_h C_n^2(h) = 1$ , en pointillés, et le profil moyen, en trait plein. Figure de droite : Le profil de  $C_n^2$  moyen.

couches, à partir desquels on a calculé 7 couches équivalentes en faisant la somme des couches sur des épaisseurs de turbulence égales (approche en couches équivalentes, [FCM<sup>+</sup>99]). On a choisi d'utiliser 17 des profils dont on disposait. Ils correspondent à des mesures prises tous les quart d'heure, sur une durée de quatre heures.

On souhaite s'affranchir des variations de  $r_0$  et étudier uniquement l'influence de l'évolution de la distribution relative de turbulence en altitude. On a donc normalisé les profils de  $C_n^2$  et fixé le  $\frac{D}{r_0}$  global à 9 pour une longueur d'onde de  $2,2\mu\text{m}$ . On a représenté en figure de gauche 3.4, les profils normalisés en question. On constate que l'altitude des couches varie très légèrement et que le poids relatif de la turbulence dans chaque couche change, lui, plus nettement. On a présenté le profil moyen seul pour plus de lisibilité en figure de droite 3.4.

On a également représenté le  $\theta_0$  à  $2,2\mu\text{m}$  pour les 17 profils en figure 3.5, classés par ordre chronologique de profils de  $C_n^2$ . Il varie sensiblement d'un profil à l'autre (d'un facteur 1,8 entre le plus grand et le plus petit). On rappelle au paragraphe (1.1.5) que le  $\theta_0$  représente le champ isoplanétique de la turbulence. On utilise la définition de Roddier [Rod81] qui donne

$$\theta_0 = 0,314 \frac{r_0}{\bar{h}} \quad (3.2)$$

$$\bar{h} = \left( \frac{\int C_n^2 h^{5/3}}{\int C_n^2} \right)^{-3/5}.$$

Plus le  $\theta_0$  est petit, plus la turbulence sera difficile à corriger du point de vue de l'anisoplanétisme. La disparité observée parmi les profils sur la valeur de  $\theta_0$  permettra d'expliquer certains résultats ultérieurs.

### 3.2.1.2 Le système, la reconstruction optimale et tomographique

Le télescope simulé est un télescope de 8 m de diamètre. Pour ce qui est de l'analyse de front d'onde, on utilise trois EGs disposées en triangle équilatéral sur un cercle d'une arcminute de diamètre. On a représenté sur la figure 3.6 les trois EGs et la direction sur laquelle sont calculées les

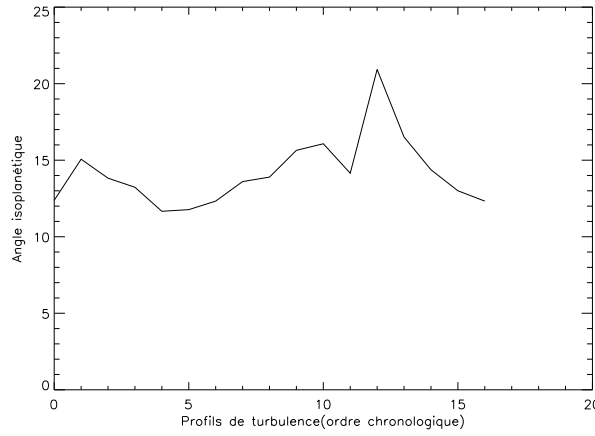
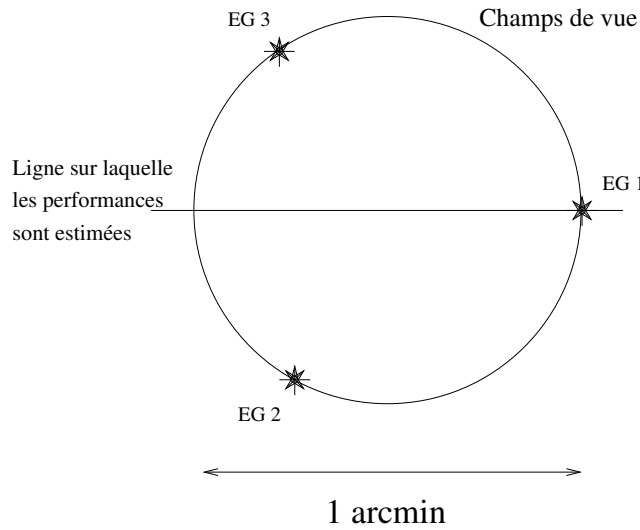
FIG. 3.5 – Evolution du  $\theta_0$  (arcsec) en fonction du profil de  $C_n^2$ .

FIG. 3.6 – Les trois EGs et la direction sur laquelle sont calculées les performances du système.

performances du système. Les analyseurs de notre simulation mesurent directement, comme au paragraphe 2.7.1, des polynômes de Zernike. On a déjà justifié cette approximation en 2.7.1. La mesure sur l'étoile  $i$  correspond donc à projeter sur les polynômes de Zernike les écrans de phase turbulents sommés sur les différentes couches dans la direction d'analyse  $\alpha_i$ . Nos analyseurs mesurent 66 polynômes de Zernike. Le bruit sur chaque analyseur a été coloré sur les ordres radiaux comme au paragraphe 2.7.1 de façon à simuler un rapport signal-à-bruit [RSB] de 10, le RSB étant défini comme le rapport des variances de bruit et de phase turbulente (*cf.* paragraphe 1.2).

Le système de correction, quant à lui, se compose de deux MD conjugués à des altitudes fixées, 1, 4 et 12, 1 km. Ces valeurs ont été déterminées sur le profil de  $C_n^2$  moyen par une moyenne des

altitudes des couches turbulentes pondérées par le  $C_n^2$  en dessous et au dessus de 9 km.

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\sum_{j, h_j < 8\text{km}} h C_n^2(h)}{\sum_{j, h_j < 8\text{km}} C_n^2(h)} \\ h_1 &= \frac{\sum_{j, h_j > 8\text{km}} h C_n^2(h)}{\sum_{j, h_j > 8\text{km}} C_n^2(h)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comme dans les simulations effectuées en OA classique, les deux miroirs simulés corrigent ici directement les 66 polynômes de Zernike mesurés. On a déjà justifié en 2.7.1 l'approximation qui consiste à dire que nos miroirs corrigent directement des zernikes. Quant au nombre de zernikes corrigés, on le justifiera au paragraphe 3.2.1.3.

On a déjà présenté au paragraphe 1.3 la reconstruction optimale, la notion de reconstruction tomographique et de projection sur les miroirs. On ne rappellera pas ici ces techniques en détail.

On peut rappeler tout de même que pour corriger la turbulence avec un nombre fini de miroirs, il y a deux approches possibles, MMSE et MAP. L'approche MMSE (Minimum Mean Square Error) se décompose en une étape d'estimation optimale sur toutes les couches, appelée "tomographique" suivie d'une projection sur les miroirs. La première étape utilise l'information *a priori* dont on dispose sur la répartition de la turbulence en altitude et de la force globale de la turbulence par l'intermédiaire de la matrice de covariance de la phase turbulente dans le volume. Notre connaissance du profil de  $C_n^2$  est donc utilisée par l'estimateur pour reconstruire la phase dans les différentes couches (dans notre cas, sur les 7 couches). Cette étape n'est limitée que par les erreurs d'analyse, c'est-à-dire le terme  $\sigma_{err}^2$  (*analyse*) dans (3.1). La deuxième étape correspond à une projection purement géométrique sur les miroirs (ici sur les deux miroirs).

On peut montrer que pour un signal et un bruit gaussiens et un nombre de miroirs égal au nombre de couches, MAP et MMSE sont équivalents.

Dans la suite, afin de bien isoler les termes d'erreur les uns des autres, on présentera des résultats obtenus avec différentes configurations et en jouant sur différents paramètres. Par exemple, pour annuler l'erreur de *generalized fitting*, on montrera la variance résiduelle en sortie d'un système à 7 MD positionnés dans les 7 couches turbulentes. De même, pour annuler l'erreur d'analyse, on augmentera le RSB ou le nombre d'étoiles dans le champ de vue. On comparera ces résultats au cas standard (défini par les conditions de simulations données).

### 3.2.1.3 Choix du nombre de Miroirs Déformables

Il a été dit au paragraphe 3.2.1.2 que l'on choisissait un système à deux MD, dont on a spécifié les altitudes. On va ici expliquer ce choix. On a vu au paragraphe 1.2.2 que le principe même de l'OAMC se base sur l'utilisation de plusieurs miroirs pour corriger le volume turbulent. Le nombre optimal de MD dépend des autres paramètres du système et des performances requises. Cette question a été étudiée précédemment ([Fus00] [FCM<sup>+</sup>99]). Dans les projets actuels, des choix variés ont été faits, selon les performances désirées. Pour le projet MAD, deux miroirs seront utilisés, pour Gémini Sud, trois miroirs. Dans les deux cas, le budget d'erreur est équilibré, c'est-à-dire que dans l'équation (3.1), les deux termes doivent être de même ordre de grandeur. Dans le cas de MAD [HMF<sup>+</sup>01], [VVRA<sup>+</sup>03], avec trois EGs prévues pour la voie "star oriented" (ou sept pour la voie

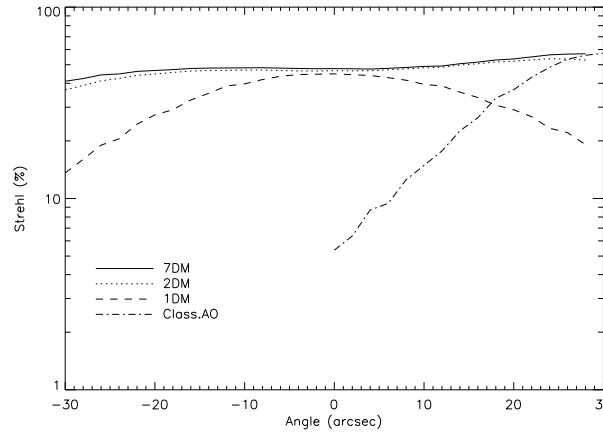


FIG. 3.7 – RS en fonction du champ pour 1, 2 et 7 MD, le cas classique est aussi représenté pour comparaison.

“layer oriented”), passer de deux à trois miroirs apporterait peu. On va en effet montrer que dans la configuration de la voie de MAD “star oriented”, le système est limité par l’analyse. Pour Gemini [RCED00] [FRE00] [BSHS02], avec cinq étoiles guides lasers (voir paragraphe 1.2.1.3) et trois EGs naturelles, le terme d’erreur d’analyse est plus faible et cela fait sens de passer de deux à trois miroirs pour diminuer le terme d’erreur de correction et équilibrer le budget d’erreur. Un résumé des projets actuels en OAMC, discuté vis-à-vis du budget d’erreur peut être trouvé en [LRCF<sup>+</sup>02].

Afin de déterminer le nombre optimal de miroirs dans nos conditions de simulation, nous avons simulé, dans les conditions de simulation précisées au dessus, la performance d’un système comportant 1, 2 et 7 MD, ce dernier cas correspondant au cas de la correction parfaite à partir de l’estimation tomographique (pas de “generalized fitting”). Dans tous ces cas, le choix des altitudes de conjugaison des MD a été fait par moyenne pondérée des altitudes du profil moyen de  $C_n^2$  découpé en 1, 2 et 7 tranches d’égales épaisseurs. Le reconstituteur est un MMSE et l’estimation est faite dans tout le champ. Le profil de  $C_n^2$  du volume turbulent est le profil moyen et l’a priori utilisé dans l’estimateur est également le profil moyen.

On présente en figure 3.7 les résultats de cette simulation. On a représenté l’Energie Cohérente (définie au paragraphe 1.2), que l’on assimile au rapport de Strehl [RS] (en %) en fonction de la position dans le champ (en arcsec), sur une ligne passant par l’une des EGs (qui correspond au repère 30'' sur l’axe des  $x$ ) et par le milieu du segment formé par les deux autres. On a représenté sur la figure 3.6 les trois EGs et la direction sur laquelle sont calculées les performances du système. On observe sur la figure 3.7 que le passage de 2 à 7 MD ne change presque rien au RS dans le champ. Pour un seul MD, l’erreur de correction est par contre dominante. On remarque la forme particulière de la courbe de Strehl dans ce cas là. L’étape de projection optimise le RS en moyenne dans le champ et fait un compromis entre les différentes directions pour faire une optimisation en moyenne. A partir de 2 MD, dans les conditions de simulations qu’on a fixées, l’erreur de correction n’est plus dominante. C’est la raison pour laquelle on a choisi 2 MD pour définir notre cas de simulation de base.

### 3.2.2 Influence de la variation du $C_n^2$

Dans une première série de simulations, nous avons utilisé une reconstruction de type MMSE, optimisé en moyenne sur le champ de vue, dont le modèle de profil de  $C_n^2$  est exact. Nous avons généré la phase turbulente à partir des 17 profils de  $C_n^2$  et à chaque fois, nous avons utilisé le modèle *a priori* adéquat pour estimer la phase turbulente par MMSE. On ne mesure donc pas ici l'influence de l'erreur au modèle, il s'agit plutôt d'évaluer dans un premier temps les performances optimales du MMSE appliqué aux 17 profils de turbulence. Les variations de performances ne sont imputables qu'à des variations de conditions de turbulence elles-mêmes, qui induisent une plus ou moins grande difficulté à estimer et à corriger la turbulence. On va remarquer dans ce paragraphe une forte variation des performances d'un profil de  $C_n^2$  à l'autre et on va constater qu'elle est essentiellement due à des erreurs d'analyse. On interprétera ce phénomène comme significatif de la difficulté d'estimer la turbulence à haute altitude.

On choisit généralement le nombre de polynômes de Zernike de façon à ce que les deux miroirs aient la même fréquence spatiale maximale de correction, et qu'elle soit égale à la fréquence maximale vue par les analyseurs. Cette approche aurait donné des miroirs corrigeant respectivement 78 et 136 zernikes. Mais on a vérifié que les conditions de simulations choisies ici, où les miroirs déformables simulés corrigent 66 zernikes en bas et en haut, donnent des performances en terme de Rapport de Strehl dans le champs et de variabilité de la performance en fonction du profil de  $C_n^2$  tout à fait similaire au cas 78 - 136 zernikes.

Cette remarque nous autorise dans la suite à utiliser la configuration 66 polynômes de Zernike dans chaque miroir, beaucoup moins coûteuse en temps de calcul.

On présente en figure 3.8 gauche le RS dans le champ d'un système qui comprend 2 MD. On constate une certaine variation de performance d'un profil de  $C_n^2$  à l'autre. Les erreurs de correction (*fitting* et *generalized fitting*) et d'analyse sont différentes selon le profil de répartition de turbulence. Afin de distinguer les deux termes d'erreur et de comprendre lequel des deux facteurs est prédominant dans cette fluctuation, on présente en figure 3.8 droite le RS d'un système qui comprendrait 7 miroirs placés dans les 7 couches turbulentes. L'erreur de *generalized fitting* est dans ce cas nulle. L'erreur de *fitting* simple, elle, ne dépend pas de la direction. Les variations dans l'anisoplanétisme résiduel, dans ce cas-là, n'est donc imputable qu'au terme d'erreur d'analyse. On constate dans ce cas-là une certaine diminution de l'écart entre les courbes de RS dans les différents cas, mais l'essentiel de la dispersion persiste. Elle est due cette fois intégralement à une variation de  $\sigma_{err}^2(analyse)$  en fonction du profil de turbulence.

L'étude de la forme des profils de  $C_n^2$  permet d'interpréter physiquement ces résultats. On présente en figure 3.9 le profil qui produit le meilleur RS et celui pour lequel le RS est le moins bon. On constate que le profil qui concentre le plus l'énergie turbulente près du sol est le meilleur et que le moins bon est celui qui comporte le plus d'énergie en haute altitude. On comprend alors d'où vient la variation de performance entre les profils de  $C_n^2$ . Plus la turbulence est en altitude et plus elle est difficile à mesurer et à estimer pour une configuration d'EGs donnée. En effet, les mesures sont faites sur des pupilles dont les projections sur une couche turbulente sont d'autant plus éloignées que la couche est haute. Plus les projections de pupilles sont séparées et plus l'interpolation est difficile. Il est donc plus difficile, pour des raisons purement géométriques, d'estimer la phase sur une couche turbulente à haute altitude que sur une couche à basse altitude. D'où le résultat que l'on a obtenu : plus les hautes

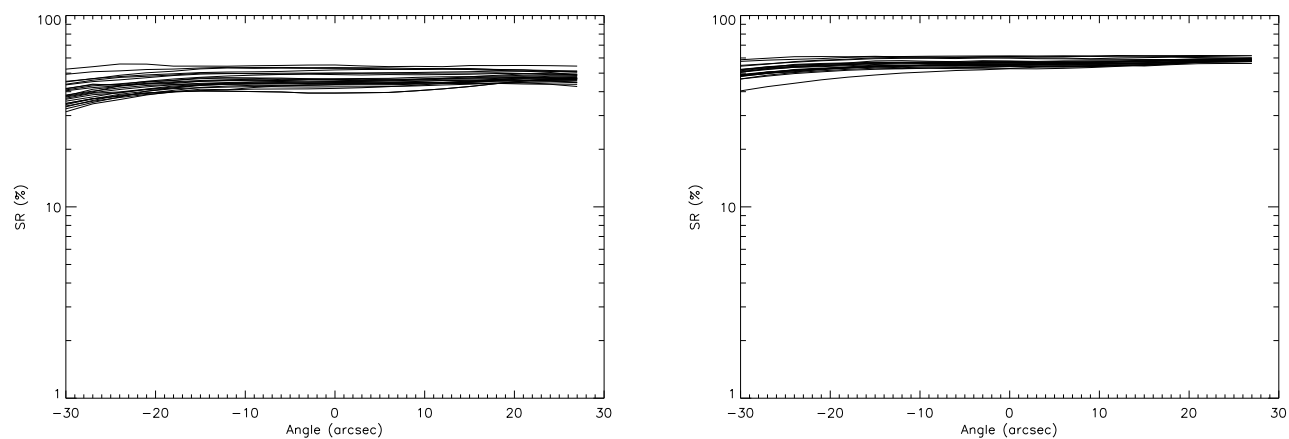


FIG. 3.8 – RS en fonction du champs pour la reconstruction MAP avec correction par sept miroirs. Les profils vrais sont utilisés comme modèle.

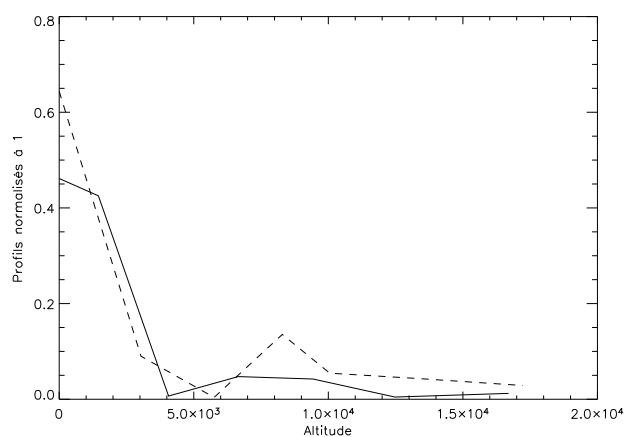


FIG. 3.9 – Les deux profils de  $C_n^2$  qui donnent le meilleur RS (trait plein) et le moins bon RS (tirets).

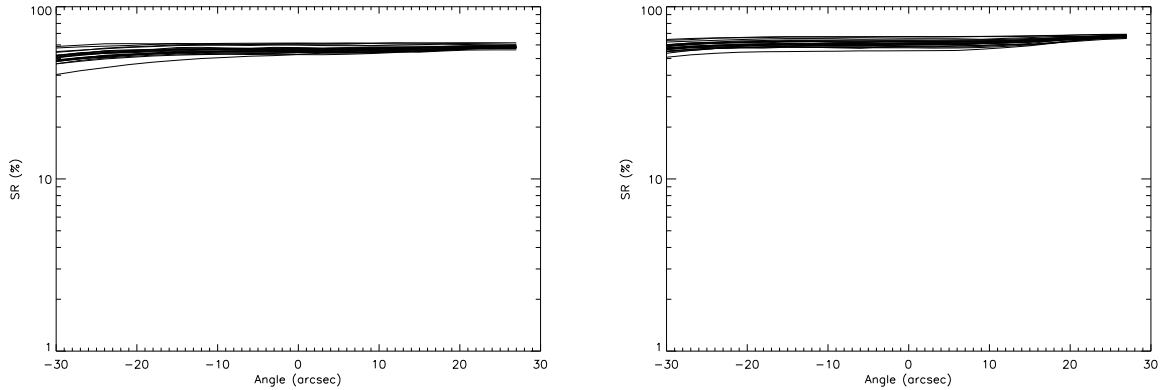


FIG. 3.10 – RS dans le champ pour le cas à 3 étoiles guides et 7 MD. Figure de gauche : RSB= 10. Figure de droite : RSB= 100.

couches comportent d'énergie et plus  $\sigma_{err}^2 (analyse)$  est élevé. On peut vérifier cette interprétation en comparant les valeurs de  $\theta_0$  pour un profil de turbulence avec la performance du MAP appliqué à ce profil. Plus le  $\theta_0$  est élevé, plus le RS est haut. Sur la figure 3.9, le moins bon profil correspond à un  $\theta_0$  de  $11.9''$  (c'est-à-dire le minimum de la figure 3.5) et le meilleur correspond à un  $\theta_0$  de  $20.7''$  (c'est-à-dire le maximum de la figure 3.5).

Il faut remarquer ici que la normalisation des profils de  $C_n^2$  telle qu'on l'a faite a peut-être tendance à surestimer la force de la turbulence dans les hautes couches. En effet, les profils de  $C_n^2$  initiaux ne sont pas à  $\frac{D}{r_0}$  strictement constant. Quand le  $r_0$  diminue, cela correspond essentiellement à une diminution de la force de la turbulence sur les basses couches, qui sont prépondérantes et pas forcément sur les hautes couches. Normaliser en  $\frac{D}{r_0}$  peut donc avoir tendance à rehausser artificiellement la force de la turbulence dans les hautes couches. Cela n'enlève rien à la pertinence des tendances mises en évidence, mais il faut garder en mémoire que les conditions atmosphériques ne sont peut-être pas toujours aussi défavorables.

### 3.2.3 Les erreurs d'analyse

Les variations de performance qui subsistent d'un profil de  $C_n^2$  à l'autre en figure 3.8 sont imputables à des erreurs d'analyse, liées à la distribution du  $C_n^2$  en altitude pour une configuration donnée d'EGs. On va étudier plus en détail ces erreurs en jouant sur deux paramètres, le RSB et le nombre d'étoiles guides.

On présente tout d'abord, pour des RSB de 10 et 100, un cas à 3 étoiles guides et 7 MD. A 7 MD, on sait qu'il n'y a plus d'erreur de correction et on concentre ainsi notre étude sur le terme d'erreur d'analyse. Les RS dans le champ sont présentés en figure 3.10. On constate une nette diminution de la variation de performance entre les différents profils de  $C_n^2$  quand on passe de RSB= 10 à RSB= 100, et notamment sur axe. C'est le premier indicateur que la variabilité des performances observée en figure 3.8 gauche provient d'erreurs d'analyse. Plus précisément, c'est le bruit de mesure et donc le bruit propagé que l'on diminue dans cette opération. A géométrie d'étoiles guides fixée, le coefficient

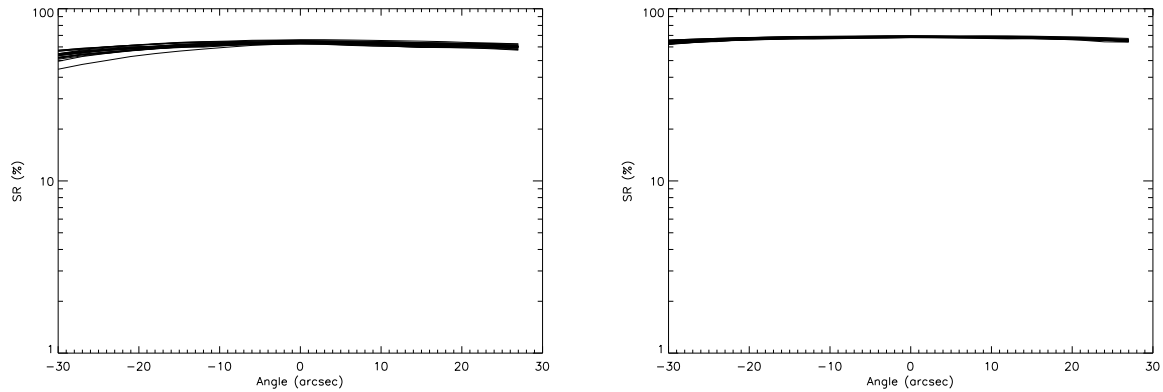


FIG. 3.11 – RS dans le champ pour le cas à 7 MD et RSB= 10. Figure de gauche : 4 EGs. Figure de droite : 13 EGs.

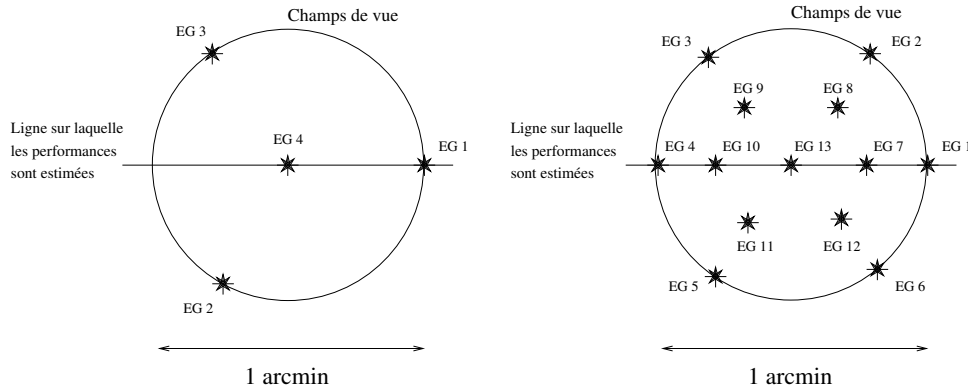


FIG. 3.12 – Les configurations à trois et treize EGs et la direction sur laquelle sont calculées les performances du système.

de propagation du bruit est plus important pour les hautes couches que pour les basses couches. Dans les cas de turbulence forte en haute altitude, le bruit propagé est donc plus important. Ceci explique que lorsqu'on diminue le bruit propagé, les performances dépendent moins de la répartition du profil de turbulence en altitude.

On fait varier maintenant le nombre d'étoiles. Plus il augmente et plus  $\sigma_{err}^2(analyse)$  diminue. Dans le cas où le champ est couvert d'étoiles, il n'y a plus d'erreur d'analyse (hormis l'erreur d'échantillonnage par l'analyseur). On présente en figure 3.11 gauche la variation du RS pour 4 étoiles et en figure 3.11 droite la variation du RS pour 13 étoiles pour un RSB de 10. Les dispositions des étoiles dans le champ et la direction dans laquelle on estime les performances sont représentées en figure 3.12.

On voit que la variabilité de RS décroît très significativement quand on augmente le nombre d'étoiles. Les courbes se rapprochent les unes des autres. Plus les étoiles sont rapprochées les unes des autres, c'est-à-dire plus il y a d'étoiles à champ fixé, et plus les projections de la pupille sur les



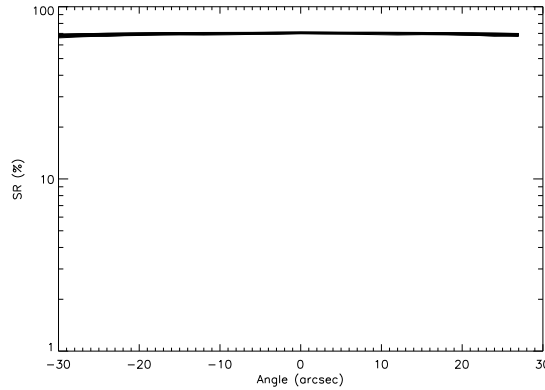


FIG. 3.13 – RS dans le champ pour le cas 7 MD, 13 EGs et RSB= 100.

hautes couches sont rapprochées et la turbulence à haute altitude facile à estimer. On comprend donc qu'on soit moins sensible à la distribution de l'énergie turbulente en altitude quand on a beaucoup d'étoiles guides.

Le cas 13 EGs et RSB= 100 est reproduit en figure 3.13, où l'on constate que la variabilité du RS d'une courbe à l'autre est encore plus faible. Tout cela prouve que les fluctuations de performances constatées en figure 3.8 gauche sont bien dues essentiellement au terme d'erreur  $\sigma_{err}^2 (analyse)$ .

Cette étude confirme l'importance de la connaissance du profil de  $C_n^2$  pour le choix d'un site où installer un système d'OAMC et par là-même l'importance du "site testing". Un site peut être d'autant plus qualifié de "favorable à l'OAMC" que la turbulence atmosphérique y est concentrée près du sol. Ce que montrent finalement ces simulations, c'est que la sensibilité d'un système aux variations de profil de  $C_n^2$  dépend du terme prépondérant dans le budget d'erreur du système et donc des paramètres du système mais aussi de la turbulence en haute altitude, qui doit donc être mesurée précisément.

### 3.2.4 Influence de la méconnaissance du profil de $C_n^2$

On va maintenant présenter les résultats de simulation qui concernent la robustesse à une erreur de modèle d'une reconstruction optimale statique. On a simulé la phase turbulente successivement avec les 17 profils de  $C_n^2$  présentés en figure 3.4. On a utilisé cette fois la même matrice de reconstruction à chaque fois, celle déterminée en utilisant comme modèle le profil de turbulence moyen. On a ensuite comparé les résultats avec ceux obtenus au paragraphe 3.2.2, où l'on utilisait comme modèle le vrai profil de  $C_n^2$  (cas idéal).

Les conditions de simulations sont celles précisées au paragraphe 3.2.1.2. On utilise un reconstruteur de type MMSE. On constate une très faible diminution du RS par rapport au cas optimal (*a priori* exacts) et ce pour tous les profils de  $C_n^2$ , dans le cas de correction à deux MD. On a présenté sur la figure 3.14 les RS dans le champ obtenus pour l'un des profils de turbulence avec 2 MD. Cette figure correspond à un résultat typique. La courbe correspondant au meilleur RS est obtenue en utilisant le vrai profil de  $C_n^2$  dans le modèle du MMSE et la courbe correspondant au moins bon RS est obtenue en utilisant le profil moyen dans le modèle du MMSE. On constate que l'estimation optimale

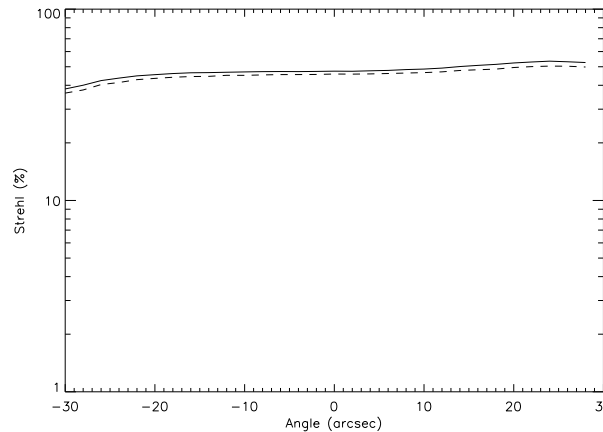


FIG. 3.14 – RS dans le champ obtenus en utilisant le vrai profil de  $C_n^2$  dans le modèle du MMSE et le profil moyen.

est très robuste aux erreurs de modèle.

La comparaison de la figure 3.14 avec la figure 3.8 gauche montre que le système tel qu'il a été défini est plus sensible en fait aux variations de profil de  $C_n^2$  (qui provoquent des variations de 20% de Strehl en bord de champ) qu'aux variations dues aux erreurs de modèle (quelques %).

Afin de bien comprendre jusqu'à quel point on peut commettre une erreur de modèle dans une reconstruction optimale, on a simulé le cas où l'on utilise comme modèle le profil constant entre 0 et 18 km. Plus précisément, on a utilisé comme modèle le profil qui contient  $\frac{1}{7}$  de la turbulence sur chaque couche, aux mêmes altitudes que précédemment. Le résultat est présenté en figure 3.15 sur un seul cas de profil de  $C_n^2$ . On perd environ 10% (et seulement 10% !) dans tout le champ. Il faut bien voir, pour comprendre ce résultat, que donner un profil de turbulence constant comme modèle, c'est déjà dire à l'estimateur que la turbulence est volumique, répartie à des altitudes connues entre 0 et 18 kilomètres. C'est déjà en soi une information importante et c'est à cette information qu'est dû le résultat présenté en figure 3.15.

Ces résultats sont très encourageants puisqu'ils signifient concrètement qu'il ne sera pas nécessaire pour faire fonctionner correctement un système d'OAMC de connaître parfaitement le profil de  $C_n^2$  à chaque instant. Ce résultat est similaire à celui qu'on avait obtenu au paragraphe 2.7.2.3 où l'on avait montré que le filtrage de Kalman assure une certaine robustesse aux erreurs de modèle temporel d'évolution de la turbulence. Il n'est pas étonnant de constater le même genre de comportement puisqu'on a montré que l'approche dynamique avec filtre de Kalman est une extension à la boucle fermée de l'approche statique optimale. Il est à noter que cette robustesse aux erreurs de modèle est un résultat classique dans les problèmes d'estimation régularisée [Idi01].

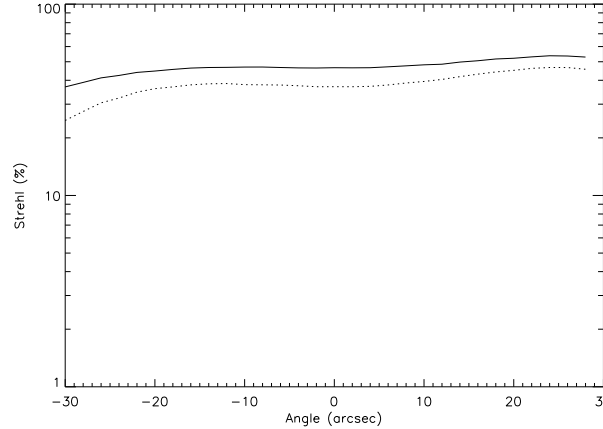


FIG. 3.15 – RS donné par un reconstituteur MMSE dont le modèle de profil de  $C_n^2$  est un profil constant sur 7 couches [pointillés] comparé au cas idéal où l'on dispose du modèle exact.

### 3.3 Le filtrage de Kalman pour l'OAMC

#### 3.3.1 Introduction, notations, présentation de l'article JOSAA

On a montré au chapitre 2.7.2 comment écrire et implémenter un filtrage de Kalman pour l'Optique Adaptative Classique. Nous allons dans ce paragraphe introduire l'article [LRCC<sup>+</sup>03a]

*Optimal control for classical and multiconjugate adaptive optics*

Le Roux B. , Conan J. -M. , Kulcsár C. , Raynaud H. -F. , Mugnier L. M. , Fusco, T.

soumis à JOSAA et qui généralise la méthode présentée en 2.7.2 au cas de l'Optique Adaptative Multiconjuguée. Il faut noter que certains de ces résultats ont été présentés à la conférence SPIE "Adaptive optical system technologies II" en Aout 2002 à Hawaï [LRCC<sup>+</sup>03b].

Cet article utilise les notations OAMC du paragraphe 1.2.2 et développe, dans le formalisme d'état présenté en 1.3, une commande pour l'OAMC. Après un rappel dans la partie 2 des notations de l'OAMC et du théorème de séparation entre estimation et correction, on résume les méthodes reconstruction optimale statique en OAMC dans la partie 3, déjà présentées au paragraphe 1.3.2 de la thèse. En partie 4, on présente le modèle d'état et le filtrage de Kalman adaptés au problème multiconjugué. On le met en œuvre en simulations numériques dans la partie 5, d'abord pour un cas OA classique (mêmes résultats que dans la partie 2.7.2) puis en OAMC.

On invite donc le lecteur à lire la partie 4 avec attention et à y remarquer les différences avec le modèle d'état du paragraphe 2.3.1, différences provenant du passage de l'OA classique à la multiconjugaison. Le vecteur représentant la phase turbulente  $\varphi^{tur}$  comporte à présent les phases sur toutes les couches, décomposées sur les zernikes. De même, le vecteur correspondant à la correction  $\mathbf{u}$  comporte les tensions sur tous les miroirs et le vecteur de mesure  $\mathbf{Y}$  contient les pentes provenant de toutes les directions d'analyse.

Dans ces conditions, le vecteur d'état et les équations du modèle d'état sont présentés en partie 4 de l'article. Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$  interviennent comme en OA classique de même que les matrices  $\mathbf{M}_\beta^L$  et  $\mathbf{M}_\beta^{MD}$ , qui découpent et projettent les couches turbulentes ou les miroirs dans les directions d'analyse. Elle s'écrivent

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{M}_\beta^L & 0 & -\mathbf{M}_\beta^{MD} \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n.$$

avec  $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1}^{tur} \\ \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}.$

Alors le filtrage de Kalman s'écrit comme au paragraphe 2.5.1. Il faut noter que le filtre n'a pas été présenté dans l'article en décomposant en partie observable et partie non-observable comme on l'avait fait au paragraphe 2.5.1. Cela n'enlève rien à la généralité de ce qu'on présente, puisque la partie non-observable du vecteur d'état n'a pas à être estimée (puisque'il s'agit des tensions sur les miroirs aux instants précédents, que l'on connaît déjà).

Finalement, les performances du filtrage de Kalman en OAMC sont présentées à la fin de la partie 4 et sont comparées avec celles obtenues à l'aide de l'approche IGMO généralisée à l'OAMC.

Il faut noter que la généralisation de l'IGMO à l'OAMC est en soit une approche novatrice et intéressante. On détermine les gains de l'intégrateur de la même façon que présenté au paragraphe 2.7.1.3.

Le calcul des gains est fait dans la base propre du système, qui diagonalise  $(\mathbf{D}\mathbf{M}_\beta^{MD}\mathbf{N})^T (\mathbf{D}\mathbf{M}_\beta^{MD}\mathbf{N})$  (figure 7).

Mais on montre que l'IGMO ne permet pas d'estimer correctement les modes mal vus, ce qui génère une perte de RS importante dans le champ vis-à-vis du filtrage de Kalman (figure 8).

### 3.3.2 Article soumis à JOSAA le 06/06/03.

## Optimal control law for Classical and Multiconjugate Adaptive Optics

**Brice Le Roux<sup>1</sup>, Jean-Marc Conan<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 92322 Châtillon, France*

**Caroline Kulcsár<sup>2</sup>, Henri-François Raynaud<sup>2</sup>**

<sup>2</sup> *Laboratoire de Traitement et de Transport de l'Information, Institut Galilée, Université Paris 13, Villetaneuse, France*

**Laurent M. Mugnier<sup>1</sup>, Thierry Fusco<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 92322 Châtillon, France*

Classical adaptive optics [AO] is now a wide spread technique for high resolution imaging with astronomical ground based telescopes. It generally uses simple and efficient control algorithms. Multi-conjugate adaptive optics [MCAO] is a more recent and very promising technique that should extend the corrected field of view. This technique has not yet been experimentally validated, but simulations already show its high potentiality. The importance for MCAO of an optimal reconstruction using the turbulence spatial statistics has already been demonstrated through open loop simulations. We propose in this paper an optimal closed loop control law which accounts for both spatial and temporal statistics. The prior information on the turbulence, as well as on the wave-front sensing noise, is expressed in a state space model. The optimal phase estimation is then given by a Kalman filter. The equations describing the system are given and the underlying assumptions explained. The control law is then derived. The gain brought by this approach is demonstrated through MCAO numerical simulations representative of astronomical observation on a 8m-class telescope in the near infra-red. We also discuss the application of this control approach to classical AO. Even in classical AO, the technique could be relevant especially for the future extreme AO systems.

© 2004 Optical Society of America

OCIS codes: 010.1080 , 010.1330 , 070.6020 , 100.3190

### 1. Introduction

High resolution imaging with ground-based telescopes is now possible with adaptive optics [AO]. However, classical adaptive optics, which uses a single deformable mirror [DM] in the pupil, provides a limited corrected field of view [FOV]. Large FOV correction can be obtained by correcting the turbulence volume above the telescope, with several DM optically conjugated at various altitudes and with several wavefront sensors [WFSs] looking at guide stars [GSs]. This corresponds to the concept of multi-conjugate adaptive optics [MCAO]. This concept has been first proposed by Dicke<sup>1</sup> and reintroduced in the early 90s with the papers of Beckers,<sup>2</sup> Tallon<sup>3</sup> and Ellerbroek.<sup>4</sup> More recently, a very impressive number of MCAO papers have been published, which all show the high potentiality of this technique<sup>5-11</sup>.

MCAO brings a new problematic in reconstruction and control: it leads to a larger number of degrees of freedom and it relies on a complex reconstruction process for the phase estimation in the volume. The presence of unseen and badly seen modes (see Sect. 3) requires a careful treatment of this inverse problem. These modes have to be estimated to insure a good interpolation of the perturbation between GSs, and, in turn, a good performance in the global FOV. In MCAO, such unseen modes can be rather numerous, they evolve with the GS geometry, and they are difficult to visualize since they correspond to a phase in the turbulent volume. For all these reasons, MCAO requires to find systematic ways of deriving an optimal control law accounting for the system characteristics, including the GS geometry, and for the spatial and temporal priors on turbulence and noise. Besides, the optimization needs to be global, that is applied to the multi-variable servo-loop.

Control laws based on a mode per mode optimization, and generally used in classical AO<sup>12-16</sup>, could be generalized to MCAO, but their performance is not optimal since they can not take advantage of the global spatial priors on the turbulence related to Kolmogorov statistics and to the distribution of the turbulence strength in altitude. The need of a global optimization for an efficient estimation of unseen modes, has already been demonstrated in ideal open loop simulations.<sup>6</sup> Future real MCAO systems will however operate in closed loop. The objective of this paper, and its most innovative aspect, is to propose a closed loop control law resulting of a global optimization, and to demonstrate its efficiency in the MCAO context. We propose an approach based on a state-space model formalism, a Kalman filter and a feedback control derived from the classical linear estimation theory.<sup>17-19</sup> Global approaches based on Kalman filtering have already been proposed in the literature.<sup>20,21</sup> Our paper makes some assumptions that simplify the theoretical developments. We assume that the DMs are fast compared to the sampling period. This assumption is often valid for astronomical applications. Paschall et al.<sup>20</sup> have shown that the mirror dynamics can be taken into account in the same framework when necessary. We also derive our control law from a simple turbulence temporal prior-model but we show in Sect. 5.C.2 that good performance can still be obtained when correcting realistic turbulent screens (Taylor model). Note that Gavel et al. have recently proposed a model that could

truly account for the Taylor hypothesis. Finally our paper is the first one that applies such an approach to MCAO. All along the paper we explain why this approach is particularly relevant in the context of MCAO, often referring to the unseen mode issue.

The performance of the proposed approach is quantified by numerical simulations. The system we simulated is representative of astronomical observations on a 8m-class telescope in the near infra-red. We begin by simulating a classical AO system. We compare the results to those obtained by the most common control law, the Optimized Modal Gain Integrator.<sup>12,22</sup> We start with a simplified temporal model and we then show that a Kalman approach based on this approximative prior is still able to efficiently correct a realistic Taylor turbulence. In classical AO, the major gain is due to capability of our approach to make a good prediction. But we verify also that it is able to deal efficiently with the unseen modes. This last point becomes a very important aspect in MCAO. We finally simulate this more complex case and compare the performance of our approach to these of the Optimized Modal Gain Integrator generalized to MCAO. This results demonstrate the gain brought by the Kalman approach in the MCAO context.

The MCAO system is presented in Section 2. The open loop optimal reconstruction is briefly recalled in Section 3. Our closed loop optimal approach is described in Section 4 and its links with previous works are discussed. In Section 5, we present numerical simulations in classical AO and in MCAO.

## 2. MCAO and optimal control

The anisoplanatism phenomenon comes from the fact that the turbulence is not located in one layer on the ground but in a volume above it. In classical AO, one single DM located on the telescope pupil cannot correct the turbulence in all the directions. The concept of MCAO is based on correcting anisoplanatism through the use of DMs optically conjugated at various altitudes in the atmosphere. We present the system and notations in section 2.A and we explain in section 2.B how the estimation and control problems can be separated.

### 2.A. System description and notations

The turbulent volume is modeled by  $N_L$  discrete independent turbulent layers located at altitudes  $\{h_j\}$ . We associate to each layer a turbulence strength  $C_n^2(h_j)\delta h$ , where  $C_n^2(h_j)$  is the index structure constant in layer  $j$  and  $\delta h$  the thickness of the layer. This turbulent volume is corrected by  $N_{DM}$  DMs optically conjugated at altitudes  $\{h'_j\}$ . The turbulence statistics is assumed to be Kolmogorov for each turbulent layer. The geometry of the system is summarized in Fig. 1.

The measurement is done with several WFS looking at several stars, the so-called GSs. We consider  $N_{gs}$  GSs in the  $\beta = \{\beta_i\}$  directions. The FOV of interest, where the correction has to be optimized, is discretized into  $K$  angles and denoted  $\alpha = \{\alpha_i\}$ . We note  $\phi_{\alpha_i}^{tur}$  the turbulent phase propagated onto the pupil in the direction  $\alpha_i$  and  $\phi_{\alpha_i}^{cor}$  the correction phase on the pupil in the direction  $\alpha_i$ . We note  $\phi^{tur,j}$  the turbulent phase on layer  $j$  and  $\phi^{cor,j}$  the

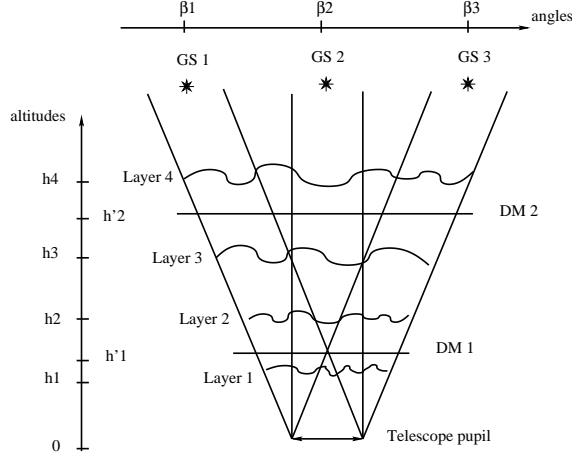


Fig. 1. Illustration of the geometry of an MCAO system. Example with  $N_L = 4$  layers,  $N_{DM} = 2$  DMs and  $N_{gs} = 3$  Guide Stars.

correction phase given by the DM number  $j$ .

The turbulent phase arriving on the telescope pupil in the direction  $\beta_i$  is given, in the near field approximation, by the sum of all the turbulent layers contributions:

$$\phi_{\beta_i}^{tur}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_L} \varphi^{tur,j}(\mathbf{r} + h_j \cdot \beta_i) \quad (1)$$

where  $\mathbf{r}$  is the position inside the pupil. The correction phase  $\phi_{\beta_i}^{cor}$ , generated by the DMs in the direction  $\beta_i$  is also defined as:

$$\phi_{\beta_i}^{cor}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{DM}} \varphi^{cor,j}(\mathbf{r} + h'_j \cdot \beta_i). \quad (2)$$

In the rest of this paper, rather than talking about continuous functions of the coordinate  $\mathbf{r}$ , we will use for  $\phi$  and  $\varphi$  a discrete representation based on a modal expansion of the phase, for instance on the Zernike polynomials. The turbulent and correction phases  $\phi^{cor}$  and  $\phi^{tur}$  are then represented by vectors of  $N_{modes}$  coefficients:  $\{\phi_k^{cor}\}$ ,  $\{\phi_k^{tur}\}$ . In this representation, we note  $\varphi^{tur} = \{\varphi^{tur,j}\}$  the volumic turbulent phase in all layers and  $\varphi^{cor} = \{\varphi^{cor,j}\}$  the volumic correction phase generated by all the DMs.  $\varphi^{tur}$  is modeled as a stochastic centered variable of Gaussian statistics characterized by its covariance matrix  $\mathbf{C}_\varphi$ . As the turbulent layers are independent,  $\mathbf{C}_\varphi$  is a block matrix which contains all the



the phase, for instance on the Zernike polynomials. The turbulent and correction phases  $\phi^{cor}$  and  $\phi^{tur}$  are then represented by vectors of  $N_{modes}$  coefficients:  $\{\phi_k^{cor}\}$ ,  $\{\phi_k^{tur}\}$ . In this representation, we note  $\boldsymbol{\phi}^{tur} = \{\phi^{tur,j}\}$  the volumic turbulent phase in all layers and  $\boldsymbol{\phi}^{cor} = \{\phi^{cor,j}\}$  the volumic correction phase generated by all the DMs.  $\boldsymbol{\phi}^{tur}$  is modeled as a stochastic centered variable of Gaussian statistics characterized by its covariance matrix  $\mathbf{C}_\phi$ . As the turbulent layers are independent,  $\mathbf{C}_\phi$  is a block matrix which contains all the covariance matrices for all layers (Kolmogorov weighted by the turbulent strength  $C_n^2 \delta h$ ) and zeros for the cross-correlations between layers.

$\mathbf{M}_{\alpha_i}^L$  is defined as the matrix which performs the sum of the contributions of each turbulent wavefront in the direction  $\alpha_i$ .  $\mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM}$  performs the sum of the contributions of each DM in the direction  $\alpha_i$ . Equations (1) and (2) can therefore be written:

$$\phi_{\alpha_i}^{tur} = \mathbf{M}_{\alpha_i}^L \boldsymbol{\phi}^{tur} \quad (3)$$

$$\phi_{\alpha_i}^{cor} = \mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM} \boldsymbol{\phi}^{cor}. \quad (4)$$

We define  $\mathbf{M}_\alpha^L$  as  $\mathbf{M}_\alpha^L = \left( (\mathbf{M}_{\alpha_1}^L)^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_i}^L)^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_{N_{gs}}}^L)^T \right)^T$ ,  $\mathbf{M}_\alpha^L$  being the matrix which performs the sum of the contributions of each turbulent wavefront in all the directions  $\alpha = \{\alpha_i\}$ :

$$\Phi_\alpha^{tur} = \{\phi_{\alpha_i}^{tur}\} = \mathbf{M}_\alpha^L \boldsymbol{\phi}^{tur}. \quad (5)$$

In the same way,  $\mathbf{M}_\alpha^{DM}$  is the matrix performing the sum of the contributions of each DM in all the directions  $\alpha = \{\alpha_i\}$ , which is written  $\mathbf{M}_\alpha^{DM} = \left( (\mathbf{M}_{\alpha_1}^{DM})^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM})^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_{N_{gs}}}^{DM})^T \right)^T$ .

These notations are also defined in the same way for  $\beta_i$  or  $\beta$  rather than  $\alpha_i$  or  $\alpha$  so that Equations (3), (4) and (5) can be written using  $\mathbf{M}_{\beta_i}^L$ ,  $\mathbf{M}_{\beta_i}^{DM}$ ,  $\mathbf{M}_\beta^L$ ,  $\mathbf{M}_\beta^{DM}$ ,  $\phi_{\beta_i}^{tur}$ ,  $\Phi_\beta^{tur}$ ,  $\phi_{\beta_i}^{cor}$  and  $\Phi_\beta^{cor}$ .

We assume that the response of a DM to voltages is linear and we denote by  $\mathbf{N}$  the matrix defining the linear relationship between the voltages  $\mathbf{u}$  applied on the DMs and the generated correction phase  $\boldsymbol{\phi}^{cor}$ :

$$\boldsymbol{\phi}^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}. \quad (6)$$

Each column of  $\mathbf{N}$  corresponds to the modal representation of the deformation of one DM actuator.

### 2.B. Separation principle between estimation and control

In order to simplify the analytical expressions of the control law, one can use the fact that the mirror dynamics can be neglected. We consider that the DM reacts very fast compared to the sampling period,  $\tau_{DM} \ll T_{sampling}$ . This assumption is generally valid for the current astronomical AO systems equipped with piezo-stacked DMs<sup>24</sup> and operating at a sampling

as

$$\mathcal{E}'(\boldsymbol{\varphi}^{tur}, \mathbf{u}) = \sum_i \left\| \phi_{\alpha_i}^{tur} - \phi_{\alpha_i}^{cor} \right\|^2 = \sum_i \left\| \mathbf{M}_{\alpha_i}^L \boldsymbol{\varphi}^{tur} - \mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM} \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} \right\|^2. \quad (7)$$

$\|\phi\|^2 = \frac{1}{S} \int_S \phi(\mathbf{r})^2 d\mathbf{r} = \sum_i \phi_i^2$  if the base is orthonormalized, denotes the so called spatial variance in the telescope pupil  $S$ .

It can be shown that searching  $\mathbf{u}$  that minimizes  $\langle \mathcal{E}'(\boldsymbol{\varphi}^{tur}, \mathbf{u}) \rangle_{\varphi, noise}$  is equivalent to minimize consecutively the criterion:

$$\mathcal{E}'' = \left\langle \left\| \boldsymbol{\varphi}^{tur} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur} \right\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise}. \quad (8)$$

with respect to  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur}$  and then to find  $\mathbf{u}$  that minimizes  $\mathcal{E}'(\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur}, \mathbf{u})$ .

We will propose in section 4 an approach which gives the estimate  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur}$  that minimizes Eq. (8). Knowing  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur}$ , the solution of the minimization of the criterion  $\mathcal{E}'(\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur}, \mathbf{u})$  can be written as:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_{[\alpha; DM]} \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{tur} \quad (9)$$

with the operator

$$\mathbf{P}_{[\alpha; DM]} = \left( \sum_i \left( \mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM} \mathbf{N} \right)^+ \left( \sum_i \left( \mathbf{M}_{\alpha_i}^{DM} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\alpha_i}^L \right), \quad (10)$$

where  $()^+$  denotes the generalized inverse. One can note that this matrix only depends on the number and positions of the DMs with respect to the true layers, and on the FOV of interest.

This separation property between estimation and projection is a classical result of linear control theory.<sup>19</sup> It has already been used in the context of MCAO.<sup>6, 21</sup>

### 3. Optimal reconstruction in open loop

In this section, we consider the phase estimation for an open loop system, which means that the measurements are performed on the uncorrected turbulent phase. The measurement process is presented in section 3.A. The estimator defined in Section 3.C gives the best estimate of the turbulent phase for a measurement at a given time. There are no time series here, we consider an instant by instant estimation. The correction is also assumed to be instantaneous without delay. The temporal issues therefore do not apply here, only the spatial priors are thus introduced in this section.

#### 3.A. The open loop measurement process

We note  $\phi_{\beta_i}^{mes}$  the phase analyzed by the  $i^{th}$  WFS (in the direction  $\beta_i$ ). Because the measurements are done before the correction,  $\phi_{\beta_i}^{mes}$  is the turbulent phase arriving on the telescope pupil in the direction  $\beta_i$ :

$$\phi_{\beta_i}^{mes}(\mathbf{r}) = \phi_{\beta_i}^{tur}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

The WFS measurements are assumed to be linear, so that the measurement given by the WFS in the direction  $\beta_i$  can then be expressed as

$$\mathbf{y}_{\beta_i} = \mathbf{D}\phi_{\beta_i}^{mes} + \mathbf{w}_i, \quad (12)$$

with  $\mathbf{D}$  the interaction matrix which defines the linear relation between the phase and the measurement (each column of  $\mathbf{D}$  corresponds to the measurements given for a single mode phase).  $\mathbf{w}_i$  is the measurement noise for WFS  $i$ , of covariance matrix  $\mathbf{C}_{\mathbf{w}_i}$ .  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_{\beta_i}\}$  is defined as the vector containing all the measurements for all directions  $\beta$ .  $\mathbf{w}$  is define as the the vector containing the measurement noise for all WFS and  $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$  is its covariance matrix.

### 3.B. The notion of unseen mode

What we call unseen mode is a mode that is not measured by the WFSs.<sup>27–29</sup> An example of unseen modes in MCAO is shown in Fig. 2. This figure represents two wavefronts at different altitudes which exactly compensate each other in the GS directions. The WFSs are blind to such a wavefront distribution. This also means that such a mode has no impact on the image quality in the GS directions. However it is still very important to estimate and then correct this mode since the resulting phase in other observation directions can be non negligible. The more the GSs are distant, the smaller the spatial frequency of the unseen modes, and the larger the turbulent energy contained in these modes. Simply filtering out such high energy unseen modes would degrade the performance in the FOV particularly when looking away from the GS positions. Estimating these modes can actually be seen as a way of performing an interpolation of the turbulent perturbation in-between the GS directions. Of course since the WFS measurements are noisy the same problematic applies to modes associated to non zero but small SNR, so-called badly-seen modes. In the rest of the paper, when speaking of unseen modes, one should actually understand that the badly-seen ones are also considered.

### 3.C. The MMSE estimator

The presence of unseen modes and their influence on image quality motivates the use of turbulent phase reconstruction which is able to estimate these modes. In the open loop case, it has been shown<sup>6</sup> that the use of spatial priors through an MMSE (Minimum Mean Square Error) estimator could satisfy this objective. We will now recall briefly this approach.

As presented in section 2.B, one should estimate  $\phi^{tur}$  from all the measurements  $\mathbf{Y}$  so that the criterion of Eq. (8) is minimized. This implies some statistical knowledge on noise and turbulence.

When assuming Gaussian statistics for noise and turbulence, the minimization of this criterion leads to a solution in  $\hat{\phi}^{tur}$  which is linear with respect to the wavefront measurements. The solution can be written in this simple form:<sup>6</sup>

$$\hat{\phi}^{tur} = \mathbf{W}_{tomo} \mathbf{Y}, \quad (13)$$

with

$$\mathbf{W}_{tomo} = \mathbf{C}_\varphi \left( \mathbf{DM}_\beta^L \right)^T \left( \mathbf{DM}_\beta^L \mathbf{C}_\varphi \left( \mathbf{DM}_\beta^L \right)^T + \mathbf{C}_w \right)^{-1} \quad (14)$$

with  $\mathbf{C}_\varphi$  and  $\mathbf{C}_w$  the covariance matrices of the turbulent phase and the measurement noise.  $\mathbf{C}_\varphi$  is a block matrix which contains all the covariance matrices for all layers (Kolmogorov weighted by the  $C_n^2$  profile) and 0 for cross correlations between layers.  $\mathbf{C}_w$  is a block matrix which contains all the noise covariance matrices corresponding to all WFSs' noise, and zero for the cross-correlations between WFSs.

Equation  $\hat{\phi}^{tur} = \mathbf{W}_{tomo} \mathbf{Y}$  corresponds to an optimal stochastic estimation of the turbulent phase on each layer for single time sample measurement. This reconstruction is often called tomographic since it gives a reconstruction of the turbulent volume from the projections measured by the WFS. It takes into account the GS geometry, the WFS measurement model, the noise and turbulence statistics, including  $C_n^2$  profile. Both noise and turbulence are characterized by their covariance matrices. Note that  $\mathbf{W}_{tomo}$  is not related to the DMs and is independent of the FOV of interest. After this estimation of the turbulent phase, as stated in section 2.B, the optimal control consists in a deterministic "projection" of the tomographic solution onto the DM to obtain the voltages which optimize the correction in the desired FOV. It corresponds to  $\mathbf{P}_{\{\alpha_i\};DM}$  as already mentioned in Section 2.B.

One can note that if we suppose  $\mathbf{N} = Id$  (which is equivalent to say that each DM can produce any correction phase) and  $\mathbf{D} = Id$  (which means the WFS directly analyze the turbulent modes), Equations (10) and (13) exactly correspond to the results given in.<sup>6</sup>

A cruder approach, which is often used to inverse this ill-posed problem of the phase correction estimation in each DM, consists in using a least square minimization on measurements  $\left\| \mathbf{Y} - \mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N} \mathbf{u} \right\|^2$ , see.<sup>25,26</sup> With our notations, this wavefront estimator is given by:

$$\mathbf{u} = \left( \left( \mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N} \right)^T \left( \mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N} \right) \right)^+ \left( \mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{Y}. \quad (15)$$

Because  $\left( \mathbf{M}_\beta^{DM} \right)^T \left( \mathbf{M}_\beta^{DM} \right)$  is generally ill-conditioned, the inversion is made using a singular value decomposition (SVD) in which the lower singular values are set to zero in order to avoid the noise amplification (truncated singular value decomposition [TSVD]).

It has been shown<sup>26</sup> that the MMSE estimator gives quite better results than the TSVD method whatever the truncation threshold is.

There are essentially two reasons why the MMSE is better than the TSVD approach, especially in the presence of energetic unseen, or badly seen, modes. The first one is the optimal minimization of noise propagation (no ad-hoc threshold adjustment procedure). The second fundamental reason is that MMSE not only controls the noise amplification on unseen modes, but also tries to estimate them using their correlation to better seen modes.

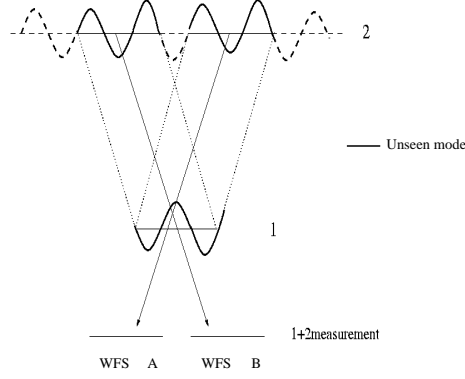


Fig. 2. Illustration of the concept of unseen modes.

The unseen modes appear in the basis that diagonalizes

$$\left(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N}\right)^T \left(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N}\right) \quad (16)$$

as the eigen vectors associated with zero, or nearly zero, eigen values.

In general,  $\left(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N}\right)$  is not square but rectangular. The size of this matrix depends on the number of DMs, number of actuators, number of GSs and number of measurements by WFS. For example, in the realistic case we simulate in Section 5.D, there is a total number of corrected modes equal to 482 and a total number of measured modes of 312 (see Section 5.D for more details). In that case, there are many unseen modes. In the optimal approach,<sup>26,30</sup> the use of spatial priors allows us to partially recover these unseen modes, while a TSVD simply filters them out.

#### 4. Optimal control law for closed loop operation

It has been shown in the previous section that the use of spatial priors are mandatory for the open loop MCAO control law, in order to estimate the unseen modes.

A real AO or MCAO system is not open loop but closed loop. What we call a closed loop is a system where the WFSs are behind the DMs and analyze the residual phase. This means that the open loop MMSE approach presented previously is not directly implementable in a real system. It comes that it is necessary to define a closed loop control law that keeps the same ability to estimate unseen modes by the use of spatial priors.

The optimal control of a realistic closed loop system with a temporal delay actually requires to account for both spatial and temporal priors.

We present the system in section 4.A and we express in Section 4.B the temporal and spatial priors in a state space model. The estimator proposed in Section 4.C gives, for a

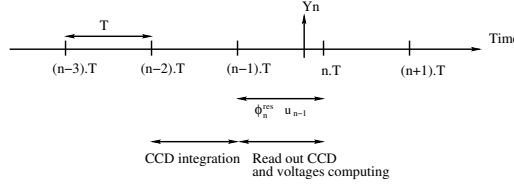


Fig. 3. Temporal diagram showing the different time intervals.  $\varphi_n^{cor}$ ,  $\varphi_n^{tur}$  and  $\Phi_n^{res}$  are integrated between  $n-1$  and  $n$  and  $u_{n-1}$  is applied between the same period.

given temporal sequence of measurements, the best estimate of the turbulent phase in the mean square sense, knowing the temporal and spatial statistics of turbulence and noise. As explained in Sect. 2.B, once  $\hat{\varphi}^{tur}$  is known, the optimal commands are given by Eq. (9).

#### 4.A. Closed loop basic relationships

The measurements are obtained with an exposure time  $T$  and the correction  $\varphi^{cor}(t)$  is constant between  $(n-1).T$  and  $n.T$ , where  $n$  corresponds to the frame number. Thus the problem can be discretized using  $T$  as the sampling period. For any continuous variable  $\mathbf{f}(t)$ , one can associate the discrete quantity  $\mathbf{f}_n$  defined as:

$$\mathbf{f}_n = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \mathbf{f}(t) dt. \quad (17)$$

The temporal diagram of the system in Fig. 3 shows how measurements and computations follow one another. The CCD camera integrates during one sampling period and it is read out during the following period. Here, we assume that the voltage computation is done during the same time period as the CCD readout. The voltages are applied during the following period of time. There is then a two sampling period delay between the beginning of the integration and the application of the correction. This corresponds to a rather common case for astronomical systems. Of course, other situations could be accounted for. For example Avalanched Photo-Diodes often used in curvature WFS lead to a significantly reduced read out time. In any case, the total delay cannot be smaller than one sampling period because of the integration time.

The turbulent phase in all layers  $\varphi_n^{tur}$ , the correction phase in all DMs  $\varphi_n^{cor}$  and the residual phase in the  $N_{gs}$  GSs directions  $\Phi_n^{res}$  are linked by:

$$\{\phi_{\beta_i}^{res}\}_n = \Phi_n^{res} = \mathbf{M}_{\beta}^L \varphi_n^{tur} - \mathbf{M}_{\beta}^{DM} \varphi_n^{cor}, \quad (18)$$

where  $\mathbf{M}_{\beta}^L$  and  $\mathbf{M}_{\beta}^{DM}$  are the matrices defined in Section 2.A.

Let  $\mathbf{N}$  be the matrix defined in Section 2.A and  $\mathbf{u}_{n-1}$  the voltages applied between  $n-1$  and  $n$ ,  $\mathbf{u}_{n-1}$  is linked to the correction phase  $\varphi_n^{cor}$  induced by the DM between  $n-1$  and  $n$  by the relation:

$$\varphi_n^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-1}. \quad (19)$$

It must be noted that Eq. (19) means that the mirror dynamics is neglected, as already mentioned in Section 2.B. Vector  $\mathbf{u}_n$ , which is applied between  $n$  and  $n+1$ , should be given from Eq. (9) by the knowledge of  $\hat{\varphi}_{n+1}^{tur}$  which minimizes:

$$\mathcal{E}_{n+1}'' = \left\langle \left\| \varphi_{n+1}^{tur} - \hat{\varphi}_{n+1}^{tur} \right\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise}. \quad (20)$$

Considering the time delay, the measurements that are used to compute  $\mathbf{u}_n$  are:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D}\Phi_{n-1}^{res} + \mathbf{w}_n, \quad (21)$$

$\mathbf{D}$  being the matrix defined in Section 3 and  $\mathbf{w}$  a white noise (measurement noise). Its covariance matrix is noted  $\mathbf{C}_w$ . Then, by using Equations (18) and (19) one can get:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \left( \mathbf{M}_\beta^L \varphi_{n-1}^{tur} - \mathbf{M}_\beta^{DM} \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-2} \right) + \mathbf{w}_n. \quad (22)$$

Our prior knowledge on the turbulence evolution can be expressed as

$$\varphi_{n+1}^{tur} = \mathbf{F} [\varphi_n^{tur}, \varphi_{n-1}^{tur}, \varphi_{n-2}^{tur}, \dots] + \mathbf{v}_n, \quad (23)$$

where  $\mathbf{v}$  is a white noise, of covariance matrix  $\mathbf{C}_v$ , and  $\mathbf{F}$  is a linear function. In the rest of the paper, we have chosen to use the following first order prior-model:

$$\varphi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}\varphi_n^{tur} + \mathbf{v}_n. \quad (24)$$

In this model,  $\mathbf{C}_v$  can be easily determined in order to conserve the global energy of the turbulence, hence

$$\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_\varphi - \mathbf{A}^T \mathbf{C}_\varphi \mathbf{A}, \quad (25)$$

with  $\mathbf{C}_\varphi$  the covariance matrix of the turbulent phase.

With a first order prior-model the temporal correlation function decreases exponentially. Real turbulence temporal evolution<sup>31</sup> can be fitted more precisely by using a higher order model. We will discuss the choice of the prior-model in more details in Sections 5.A and 5.B.

#### 4.B. Linear state space model

A linear state space model describes the dynamical behavior of a system and its outputs (measurements) using a state space vector, whose evolution is given by a linear equation called the state equation.

In our case, the state model based on a state vector  $\mathbf{X}_n$  must summarize the basic relationships of the system into the standard stationary formulation:<sup>19</sup>

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{X}_n + \mathcal{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{V}_n, \quad (26)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathcal{C}\mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n, \quad (27)$$

where  $\mathbf{w}_n$  is the noise defined in Eq. (21) and  $\mathbf{V}_n$  a Gaussian white noise with covariance matrix  $\mathbf{C}_v$ .

The choice of the state vector is crucial.  $\mathbf{X}$  must contain all variables necessary for Equations (22) and (23) to be summarized into Equations (26) and (27), and for the estimation of the voltages  $\mathbf{u}$ . Equation (22) implies then that  $\mathbf{X}_n$  must contain  $\varphi_{n-1}^{tur}$  and  $\mathbf{u}_{n-2}$ . The voltages  $\mathbf{u}_n$  are determined only through  $\mathbf{X}_n$  so as to correct  $\varphi_{n+1}^{tur}$  (this corresponds to a prediction). This implies that  $\varphi_{n+1}^{tur}$  must be in  $\mathbf{X}_n$ .

At this stage,  $\mathbf{X}_n$  is composed of at least  $\varphi_{n+1}^{tur}$ ,  $\varphi_n^{tur}$  and  $\mathbf{u}_{n-2}$ . To be able to write the evolution equation for  $\varphi_{n+1}^{tur}$ ,  $\varphi_n^{tur}$  must be in the state vector too, and, as  $\mathbf{u}_{n-2}$  must be kept in memory,  $\mathbf{u}_{n-1}$  is also contained in  $\mathbf{X}_n$ .

$\mathbf{X}_n$  needs also to contain all the  $\varphi_{n-i}^{tur}$  used in Eq. (23). For the first order prior-model considered in this paper, we only need  $\varphi_n^{tur}$ , which is anyway already included in  $\mathbf{X}_n$ . For a model order less than 3, the state vector is left unchanged as  $\varphi_n^{tur}$  and  $\varphi_{n-1}^{tur}$  are contained in the state vector  $\mathbf{X}_n$ . For a model order higher than three, the state vector should incorporate a larger number of time steps.

For a first order AR prior-model, the state vector is then:  $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1}^{tur} \\ \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}$  and the

state model is:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{M}_\beta^L & 0 & -\mathbf{M}_\beta^{DM}\mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (29)$$

#### 4.C. Kalman filter and feedback control

As stated in Section 2.B, once the estimation of  $\mathbf{X}_n$  is done in order to minimize Eq. (20), the optimal command is given by Eq. (9).

If a system can be described by a linear state model, the optimal estimation of  $\mathbf{X}_n$  minimizing a given quadratic criterion, is provided by a Kalman filter:<sup>17</sup>

$$\hat{\mathbf{X}}_{n/n} = \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{H}_n \cdot (\mathbf{Y}_n^{meas} - \mathcal{C} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}), \quad (30)$$



where  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$  is the estimation of  $\mathbf{X}_n$  obtained using  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_n\}$ . The vector  $\mathbf{Y}_n^{meas}$  stands for the experimental measurement at  $n$  (as opposed to the measurement model  $\mathbf{Y}_n$  of Eq. (29)). In a Gaussian framework, this estimate is exactly the posterior mean of  $\mathbf{X}_n$  knowing  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_n\}$ . By taking the conditional mean of both parts in Eq. (26), one obtains the prediction vector  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  as a linear function of  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$ . It gives the recursive estimation:

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathcal{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathcal{B}\mathbf{u}_n + \mathcal{A}\mathbf{H}_n(\mathbf{Y}_n^{meas} - \mathcal{C}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}), \quad (31)$$

where  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  is the prediction of  $\mathbf{X}_{n+1}$  using  $\{\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_n\}$ .  $\mathbf{H}_n$  is called the observer gain and is doing the trade-off between priors and measurements. It is equal to:

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{C}^T (\mathcal{C}\mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{C}^T + \mathbf{C}_w)^{-1}, \quad (32)$$

with  $\mathbf{C}_w$  the matrix covariance of the noise and  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  the matrix covariance of the state vector estimation error, predicted for the instant  $n$  at the instant  $n-1$ .  $\mathbf{C}_{n/n-1}$  is computed by solving the Ricatti equation:<sup>17</sup>

$$\mathbf{C}_{n+1/n} = \mathcal{A}\mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{A}^T + \mathbf{C}_v - \mathcal{A}\mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{C}^T (\mathcal{C}\mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{C}^T + \mathbf{C}_w)^{-1}\mathcal{C}\mathbf{C}_{n/n-1}\mathcal{A}^T. \quad (33)$$

Practically, the recursive Eq. 31 is the one that has to be implemented. The new measurement is introduced at each step as  $\mathbf{Y}_n^{meas}$  and the estimate of  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  at  $n$  is given by Eq. 31. This means  $\mathbf{H}_n$  should be estimated at each step too. The state model equations does not appear explicitly in the Kalman filter implementation. It is present through matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathbf{C}_v$  and  $\mathbf{C}_w$ . Once initial values for  $\mathbf{X}_0$  and  $\mathbf{C}_0$  have been chosen, Equations 31, 32 and 33 are the only ones needed for the estimation iterations.

One must note that, as we already said, there is a delay between the measurement and the correction. This means that it is necessary to make a prediction of the evolution of the turbulent phase. The approach we propose makes this prediction by using the equation of evolution of the turbulence, induced by Eq. (28). This is why the state vector  $\mathbf{X}_n$  contains  $\phi_{n+1}^{tur}$ . The estimation of  $\mathbf{X}_n$  therefore implicitly includes this prediction step.

The voltages are then given by Eq. (9):

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}_{[\alpha;DM]}\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}. \quad (34)$$

with  $\mathbf{P}_{[\alpha;DM]}$  the projector given in section 2.B.

It is worth noting that the complete closed loop system including Kalman filtering is stable as soon as the model of Eq. (28)-(29) is stable.<sup>19</sup>

#### 4.D. Kalman filtering in a Classical AO case

The notations and expressions in Section 3 and 4 are defined for the MCAO case. The classical AO case can of course be seen as a special application of those notations. The classical AO optimal control can be deduced immediately from the MCAO case by replacing  $N_{DM} = 1$ ,  $N_L = 1$ ,  $N_{gs} = 1$ ,  $\alpha = \beta$ , the DM altitude  $h' = 0$ , the layer altitude  $h = 0$  and

the matrices  $\mathbf{M}_\alpha^{DM} = \mathbf{M}_\beta^{DM} = Id$  and  $\mathbf{M}_\alpha^L = \mathbf{M}_\beta^L = Id$ . This is what we did in the classical AO simulations presented in Sect. 5.C.

#### 4.E. Kalman filtering and previous works

##### 4.E.1. Optimized Modal Gain Integrator

The OMGI was proposed in 1994 by E. Gendron<sup>12,13,22,41</sup> and is used in Classical AO systems (NAOS, for instance<sup>42</sup>). This approach minimizes the variance of the residual phase in the context of an integrator control law. It is performed mode by mode, for instance on the eigen modes of the system (that is on the basis which diagonalizes  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ ) or on the Karhunen-Loeve modes. As we will see in Sect. 5.C.3 and 5.D, such a mode by mode treatment is sub-optimal especially when dealing with unseen modes. Hence the interest of the multi-variable Kalman approach described in this paper.

If the noise and the signal are decorrelated, one can express, in a Laplace transform representation, the variance of the  $i^{th}$  mode as:<sup>12,13</sup>

$$\sigma_i^2 = \int |E_i(j\omega)|^2 \langle |\tilde{\phi}_{tur,i}(j\omega)|^2 \rangle d\omega + \int |H_i(j\omega)|^2 \langle |\tilde{w}_i(j\omega)|^2 \rangle d\omega \quad (35)$$

where  $\langle |\tilde{\phi}_{tur,i}|^2 \rangle$  and  $\langle |\tilde{w}_i|^2 \rangle$  are the temporal power spectral density [PSD] of the turbulent phase and of the noise.  $E_i$  is the so called rejection transfer function and  $H_i$  the noise transfer function, they are both defined in the Laplace space and depend on the gain of the integrator.

The higher the gain, the more the correction of the signal is efficient, but the more the noise is amplified too. By minimizing mode by mode  $\sigma_i^2$  with respect to the gain (which appears in  $E_i$  and  $H_i$ ), one can obtain the optimal gain for the modal integrator control law. This gain is applied in the system eigen mode basis. We must note that the gains are generally thresholded for stability reasons. With a total time delay in the loop of two frames it can be shown that the integrator is strictly stable up to a unit gain. Yet, we will set the maximum gain to 0.5 to respect the standard stability margins.<sup>14,43</sup>

It must be noted here that an integrator control law does not explicitly include a prediction of the turbulence evolution. There is in fact in the integrator an implicit model of evolution which corresponds to a static phase. This model is indeed not very relevant and does not account efficiently for the temporal evolution of turbulence.

##### 4.E.2. Closed loop generalization of the open loop MMSE approach

The Kalman approach as defined above can be seen as an implementation in closed loop of the open loop MMSE approach.

Indeed, considering the estimation part, one can first note that the state vector consists only in  $\boldsymbol{\varphi}_n^{tur}$ , because there is no delay between the measurements and the corrections in the open loop description used in Section 3 and because there is no time series of turbulent phase and the phase is estimated instant by instant. We also get  $\mathcal{A} = 0$  (which only means

that there is no temporal correlation), and an adapted measurement equation ( $\mathcal{C} = \mathbf{DM}_\beta^L$ ). The Kalman estimator then exactly boils down to the open loop estimator given in Eq. (14): with  $\boldsymbol{\varphi}_n^{tur}$  as state vector, Eq. (30) becomes:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n/n}^{tur} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n/n-1}^{tur} + \mathbf{H}_n^1 \cdot (\mathbf{Y}_n^{meas} - \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n/n-1}^{tur}), \quad (36)$$

where  $\mathbf{H}_n^1$  is the new  $\mathbf{H}_n$  adapted to the open loop system. As  $\mathcal{A} = 0$ , Eq. (33) gives  $\mathbf{C}_{n+1/n} = \mathbf{C}_v$ . Matrix  $\mathbf{H}_n^1$  is then given by Eq. (32) and is equal to

$$\mathbf{H}_n^1 = \mathbf{C}_v \cdot (\mathbf{DM}_\beta^L)^T (\mathbf{DM}_\beta^L \mathbf{C}_v (\mathbf{DM}_\beta^L)^T + \mathbf{C}_w)^{-1}. \quad (37)$$

with  $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_\varphi$ . The turbulent phase from one instant to the other is then totally decorrelated and the prediction for the turbulent phase  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n/n-1}^{tur}$  is 0.

By replacing  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n/n-1}^{tur}$  by 0 in Eq. (36) and  $\mathbf{H}_n^1$  by its expression, one finds indeed the tomographic open loop optimal expression already given in Eq. (14).

This is quite important because it means that previous results and such conclusions given in open loop with the optimal approach in MCAO,<sup>5,6,26,32</sup> as the optimal number of DMs, number and geometry of GSs, FOV and achievable performance, should also be verified in closed loop.

#### 4.E.3. Comparison with previous works on prediction

Dessenne et al.<sup>14</sup> proposed in 1998 a temporal predictor. The global servo-loop was assumed to be composed of parallel scalar servo-loops applied to some modal coefficients. Each modal control law was then derived from the temporal priors expressed in a frequency representation. The so-called “modal predictor” was shown to use more efficiently the temporal priors than the OMGI approach.

For one mode, the transfer function of the corrector can be expressed in a z-transform representation as:

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i z^{-i}} \quad (38)$$

where  $(a_i)_{0 \leq i < q-1}$  and  $(b_i)_{1 \leq i < p-1}$  are parameters to adjust (and  $z$  represents the “z transform” variable).  $p$  and  $q$  define the corrector order.

This corrector can be expressed in a state model formalism. It uses an implicit model for the evolution of the turbulence. This model can be read for mode  $m$  as:

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{tur,m} = \sum_{i=1}^{p-1} b_i \boldsymbol{\varphi}_{n-i}^{tur,m} + v_n. \quad (39)$$

The equivalent estimator in the state model formalism takes the form of Eq. (30) in which the equivalent  $\mathbf{H}_n$  is no longer given by the Kalman filter theory. The equivalent  $\mathbf{H}_n$  is a function of  $(a_i)_{0 \leq i < q-1}$  and  $(b_i)_{1 \leq i < p-1}$  which is no longer optimal. This approach

must also deal with the problem of stability of the control. The parameters  $(a_i)_{0 < i < q-1}$  and  $(b_i)_{1 < i < p-1}$  must then be adjusted under a stability constraint. The Kalman filter as noted in Sect. 4.C ensures the stability of the control loop as long as the model used does not diverge, which is ensured here through Eq. (25) and that the system is not too far from the model.

Finally the other main limitation of Dessenne's approach comes from the fact that it proposes, like the OMGI, a mode by mode tuning rather than a global optimization of the AO multi-variable servo-loop.

#### 4.E.4. Previous attempts to use a Kalman filter in Classical AO

In 1993, Paschall and Anderson<sup>20</sup> proposed to use a Kalman filter (along with a state space model) to control a Classical AO system. There are several differences between their proposal and ours. First of all, our control law is adapted to MCAO and not only to the classical AO. Secondly, our analytical expressions are considerably simplified because we restrict our formulation to the case where mirror dynamics can be neglected (see discussion in Sect. 2.B). Finally, we avoid some difficulties by treating the problem as a discrete-time problem from the beginning. Paschall and Anderson were modeling one part of the system as continuous (for instance the turbulence) and the other as discrete (the WFS), which forces to link the two parts later on.

#### 4.F. Practical considerations

##### 4.F.1. Number of operations and computing time

Before comparing the performance of a Kalman filter to other types of estimators in different cases, it is interesting to compare the practical operations that are necessary between our approach and an integrator approach.

The more basic and usually used control law is the so-called integrator law. Each time the system gets a new measurement  $\mathbf{y}_n$ , with an integrator, the new command is computed as

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{M}_{\text{com}} \mathbf{Y}_n^{\text{meas}} \quad (40)$$

where  $\mathbf{M}_{\text{com}}$  is the command matrix. It is the only parameter that can be adjusted. The integrator control law does not provide any estimation of the turbulent phase.

With a Kalman filter the new command is a projection of one component of the predicted state vector given by Eq. (31).

In fact, in practice, it is possible to decrease the number of stored parameters by dividing the state vector into two parts, the turbulent phases and the voltages. The operation that is actually needed at each step to compute the new phase estimate is given by the three first components of Eq. 31:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_{n+2/n} \\ \hat{\phi}_{n+1/n} \\ \hat{\phi}_{n/n} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{n+1/n-1} \\ \hat{\phi}_{n/n-1} \\ \hat{\phi}_{n-1/n-1} \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2 (\mathbf{Y}_n^{\text{meas}} - \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{u}_{n-2}). \quad (41)$$

The new command is then deduced from Eq. 41:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{M}_4 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1/n} \quad (42)$$

where the size of  $\mathbf{u}$  is the number of actuators,  $n_{act}$ , the size of  $\boldsymbol{\varphi}_n$  is the number of modes used to describe the turbulent phase,  $n_{mod}$ , and the size of  $\mathbf{Y}_n$  is the number of measurements of the WFS,  $n_{wfs}$ .

On the one hand, for the integrator control law, we need to keep in memory the matrix  $\mathbf{M}_{com}$ , whose size is  $n_{act} \times n_{wfs}$ . On the other hand, for the Kalman and feedback control, we need to keep in memory the whose size is  $3n_{mod} \times n_{wfs}$ ,  $\mathbf{M}_3$ , whose size is  $n_{wfs} \times n_{act}$ ,  $\mathbf{M}_4$ , whose size is  $n_{act} \times n_{mod}$  and the voltages at the current instant and the previous instant  $\mathbf{u}_{n-1}$  and  $\mathbf{u}_n$ . It is also possible to decrease the number of parameters to be kept in memory with sparse matrix considerations. Obviously, the Kalman approach we suggest still requires to record more variables than an integrator approach.

Additionally, it must be noted that  $\mathbf{H}_n$  must be computed at each time step. A solution to deal with this problem is to use the limit of  $\mathbf{H}_n$  when  $n$  tends towards infinity. It can be computed independently and limits the performance of the system only during the few first iterations. The major reason why this “trick” is effective is that the Riccati equation (cf. Eq. (32)) that must be solved to compute  $\mathbf{H}_n$  converges fast<sup>19,33</sup>.

#### 4.F.2. Taking into account the static aberrations

Up to now, we have considered that the phase to be corrected was purely a Kolmogorov turbulent phase, evolving in time. In a real system, one must take into account static aberrations, coming essentially from the optical components. It is easy and instructive to examine how to estimate and compensate these aberrations in the Kalman framework. One only has to introduce a constant phase  $\boldsymbol{\varphi}^{cst}$  added to the turbulent phase  $\boldsymbol{\varphi}^{tur}$ . The evolution Eq. (23) then becomes:

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{tot} = \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{cst} + \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{tur} \quad (43)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{tur} = \mathbf{F} [\boldsymbol{\varphi}_n^{tur}, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}^{tur}, \boldsymbol{\varphi}_{n-2}^{tur}, \dots] + \mathbf{V}_n \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{cst} = \boldsymbol{\varphi}_n^{cst} \quad (45)$$

For a first order evolution model Eq. (24), the state vector then becomes:  $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{cst} \\ \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{tur} \\ \boldsymbol{\varphi}_n^{tot} \\ \boldsymbol{\varphi}_{n-1}^{tot} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}$ .

The state model becomes:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_\beta^L & 0 & -\mathbf{M}_\beta^{DM} \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (47)$$

The equations of the Kalman filter (Eq. 31,32 and 33) can then be applied with the new matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ . Thus, by introducing the static aberrations in this way into the model, it is possible to estimate and compensate them without difficulty.

### 5. Simulations, results and interpretations

We have presented the theoretical development of an optimal control law based on a Kalman filter and we have explained why we think it is a promising approach to estimate the turbulent phase in closed loop. We now quantify with numerical simulations the gain brought by this new approach. The idea is to first illustrate the method on the easy and well understood classical AO case. We then proceed to the more complex and challenging MCAO case. The simulation conditions are representative of typical astronomical observations on a 8m-class telescope in the near infra-red.

We briefly describe in Sect. 5.A the “prior-models” and “phase-generation-models” used in the simulation. We then discuss the differences between a first order AR and a Taylor model in Sect. 5.B. The classical AO simulations are presented in Sect. 5.C. We compare the Kalman’s performance with these of the OMGI in Sect. 5.C.2. We first consider a favorable case where both the prior and phase generation model follow a first order AR. We then check that a Kalman approach based on a simple first order AR can still conserve its gain over OMGI when phase generation is based on more representative translating screens (Taylor case). Finally (see Sect. 5.C.3), we artificially introduce unseen modes in the classical AO simulation. This tutorial case clearly demonstrates the Kalman’s ability to deal with unseen modes in MCAO.

We finally simulate the MCAO case in Section 5.D. The performance of the Kalman approach are compared to those of the OMGI generalized to MCAO. We demonstrate the gain of the Kalman approach, particularly in the FOV between the GSs.

#### 5.A. Turbulence models

First of all, one has to understand that there are here two different notions of turbulence models: the “phase-generation-model” on one hand, that is used to generate the time series of turbulent phase, and the “prior-model” on the other hand, that is used to build the Kalman estimator as described in Sect. 4.

In classical AO, the prior-model used in all our simulations is a first order AR turbulent model presented in Eq. (24). For the phase-generation-model, we use successively two models. The first one is a first order AR identical to the prior-model. The second one is a so-called Taylor model. In this case, we create three phase-screens by the Mac-Glamery approach<sup>34</sup> and we shift them across the pupil with the same wind speed ( $V/D = 2$  Hz) but with different wind directions ( $0^\circ, 120^\circ$  and  $240^\circ$ ). We use linear interpolations for translations of a decimal number of pixels.

In MCAO, the prior-model and phase-generation-model are identical, they correspond to a first order AR model, on each layer with a scaling factor accounting to the turbulence profile  $C_n^2$ .

Note that in the OMGI there is also an underlying temporal PSD model used to optimize the gains (see Eq. 35). In all the simulations presented here, the PSD model used for the OMGI is always derived from the phase-generation-model itself.

### 5.B. The auto-regressive model

We must now precise with more details which first order AR [AR1] model we used.

The matrix  $\mathbf{A}$  in Eq. (24) has been chosen diagonal and its elements adjusted to respect the characteristics of the turbulence temporal evolution.

More precisely, we enforce a correlation time which decreases with the Zernike radial order. We have based this choice on the result, given in,<sup>31</sup> that the cut off frequency  $f_c$  of the PSD of a Taylor turbulent phase is proportional to  $n + 1$ , where  $n$  is the Zernike radial order. The characteristic time of evolution of the turbulent phase  $\tau_c$  can be approximated by  $\tau_c \simeq \frac{1}{f_c}$  and is then proportional to  $1/(n + 1)$ .

The characteristic time of evolution of the AR generated turbulence, defined as the correlation time at  $1/e$  can be written, for the radial order  $n$ ,  $\tau_c^{AR} = -1/\log(a_n)$  where  $a_n$  is the coefficient of matrix  $\mathbf{A}$  for the radial order  $n$  and  $\log$  is the Neperian logarithm.  $\tau_c^{AR} = \tau_c$  then gives us the relative evolution of  $a_n$  with  $n$  representative of a turbulent evolution. This approach still leaves us one parameter to adjust, for example  $a_1$ .

The decorrelation of the first order AR turbulence is exponential, this corresponds to a PSD which is constant before a cut off frequency  $f_c^{AR}$  and then decreases with a  $f^{-2}$  law. On the other hand, the Taylor PSD also exhibits a cut off frequency  $f_c$  but after  $f_c$ , the decrease is much sharper and follows a  $-17/3$  power law.<sup>31,35,36</sup> This means the AR turbulence contains more energy on the high temporal frequencies. This difference of behavior between the AR and Taylor models prompted us to define a notion of equivalent wind speed for the AR generated turbulence (see Sect. 5.C.1). One must also note that the AR temporal behavior is related to the model order. A higher order could provide a PSD closer to that of a Taylor turbulence. On the other hand, it would also increase the complexity of the filter and could potentially decrease its stability and robustness.

In any case, we will check in Sect. 5.C.2 that our Kalman control based on a simple first order AR prior-model can be rather efficient even when operating on a Taylor phase-

generation-model.

One could also wonder if our simple first order AR prior model truly allows to perform an efficient global optimization. Indeed,  $\mathbf{A}$ , is a diagonal matrix, and  $\mathbf{C}_\phi$  is quasi diagonal in the Zernike basis. One must however realize that, in general, the measurement equation is not diagonal in the Zernike basis. Despite the simple prior model the Kalman multi-variable loop is therefore far from being equivalent to independent scalar loops. In other words, in the system eigen mode basis, where unseen modes appear, the turbulence covariance matrix is far from diagonal, which means that the eigen modes are correlated. Our simple prior is sufficient to encode these spatial correlations, and give some information about the temporal behavior. The Kalman approach uses all this to recover unseen modes, as will be shown in Sections 5.C.3 and 5.D. The only case where the Kalman control is probably close to decoupled scalar loops is the case of Sect. 5.C.2 where, for the sake of simplicity, the WFS is assumed to directly measure Zernike coefficients.

Concerning the temporal prior, it could also be interesting to build a turbulence model that really imposes the Taylor frozen flow hypothesis. A recent paper<sup>21</sup> has proposed a way to apply such a constraint. In this case both the wind speed and the the wind direction can be taken into account. Less informative models, such as our AR description, can still be interesting when the wind is not well known, or not well defined. The latter succeeds when the wavefront is the sum of several Taylor contributions in several layers characterized by different wind vectors.

### 5.C. Simulations in Classical Adaptive Optics

#### 5.C.1. Simulation conditions

We first describe the turbulence and system simulation conditions. The turbulent phase is composed of the 13 first Zernike radial orders (Zernike polynomials number 2 to 105).  $\frac{D}{r_0}$  is set to 10 at the imaging wavelength. The delay of the loop is two sampling period (as already mentioned and described in Fig. 3). The WFS measures directly the Zernike polynomials 2 to 105, meaning that the matrix  $\mathbf{D}$  is assumed to be identity. The measurement noise is Gaussian and representative of a  $9 \times 9$  microlenses Shack-Hartmann WFS. In order to be equivalent to the noise propagation through the reconstruction from Shack-Hartmann [SH] data, the noise has been colored<sup>37,38</sup> with a variance proportional to  $(n+1)^{-2}$ . The Signal to Noise Ratio [SNR] has been taken between 5 and 50. The SNR is defined as the variance of the slopes on the equivalent SH divided by the measurement noise variance. The sampling frequency  $f_{\text{samp}}$  has been taken equal to  $f_{\text{samp}} = 50$  Hz and  $f_{\text{samp}} = 100$  Hz.

These simulation conditions are representative of near infra-red observation on a 8 m. telescope in a good astronomical site. As an example, taking a zero-point derived from NAOS<sup>42</sup> for a visible WFS operating at  $0.7\mu\text{m}$ , and considering an imaging wavelength of  $2.2\mu\text{m}$ , a WFS SNR of 10 is representative of a GS magnitude 15 with a sampling frequency of 100 Hz. Such a sampling frequency is well adapted to such a GS magnitude to provide a good correction. Using a higher frequency would lead to an increased noise level,



leading to a reduced loop gain and to no improvement in terms of effective bandwidth.

The DM corrects directly the Zernike polynomials 2 to 105 which means that  $\mathbf{N} = Id$ . In all the simulation results presented in this paper, we have added the variance generated by the turbulent modes with radial order larger than 13 to the residual variance obtained for the corrected 13 first radial orders. This means that all the variances are computed as:<sup>39,40</sup>

$$\sigma_{res}^2 = \sigma_{res}^2(n = 1 : n_{max}) + \sum_{n=n_{max}+1}^{\infty} \sigma_{res}^2(n) \quad (48)$$

$$\simeq \sigma_{res}^2(n = 1 : n_{max}) + 0.458(n_{max} + 1)^{(-\frac{5}{3})} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (49)$$

where  $n$  represents the radial order and  $n_{max}$  is the last radial order simulated in the turbulent phase, here  $n_{max} = 13$ . An appropriate definition of an equivalent wind speed still remains to be given. To do so, we have simulated an integrator control law (fixed gains 0.5 on each mode) on the classical AO system defined above with a sampling frequency of 100 Hz and a SNR equal to 50. We estimate the residual variances when this integrator is applied to a Taylor turbulence parameterized by the wind speed  $V$  and to the AR turbulence parameterized by  $a_1$  defined in Section 5.A. We say that  $V$  is the equivalent wind speed for a given  $a_1$  if the residual variances are equal. For  $\frac{V}{D} = 2$  Hz and  $f_{ech} = 100$  Hz, we found  $a_1 = 0.99014$ .

#### 5.C.2. Comparison of the Kalman approach with the ‘‘Optimized Modal Gain Integrator’’.

We mentioned that  $\mathbf{D}$  was here the identity, which means that the eigen modes of the system are the Zernike polynomials themselves. The gains are therefore optimized on the Zernike polynomials. They are thresholded to 0.5 for stability reasons.

To compare the two approaches, we have defined the factor  $\rho$ , which gives the enhancement factor of a Kalman filter over the OMGI. If  $\sigma_{res}^2(Kalman)$  and  $\sigma_{res}^2(OMGI)$  are the variances of the residual phases obtained with the two methods, the enhancement factor is defined as:

$$\rho = \frac{\sigma_{res}^2(OMGI) - \sigma_{res}^2(Kalman)}{\sigma_{res}^2(OMGI)}. \quad (50)$$

If  $\sigma_{res}^2(Kalman)$  is 0,  $\rho$  is 100%. If it is equal to  $\sigma_{res}^2(OMGI)$ ,  $\rho$  is equal to 0%.

Fig. 4 represents the evolution of  $\rho$  with the SNR for these two sampling frequencies. For 100 Hz, the enhancement factor goes from 16% to 25% and for 50 Hz, it goes from 20% to 31% when SNR increases.

In terms of absolute performance, the Strehl Ratios, given respectively for Kalman and IGMO, are 28% and 22% for 100 Hz and  $SNR = 15$ , while they are 37% and 29% for 100 Hz and  $SNR = 50$ .

It is easy to understand why the enhancement factor increases when the sampling frequency decreases. The lower the sampling frequency, the more the turbulent phase changes between two measurements and the more we need to make a good prediction. As already

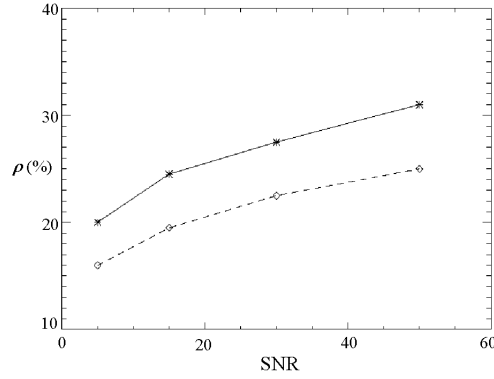


Fig. 4. Enhancement factor of the Kalman filter  $\rho$ , in %, versus SNR for two sampling frequencies, 50 Hz [continuous line] and 100 Hz [dashed line].

said in Section 4.C, the Kalman approach provides a prediction of the evolution of the turbulent phase, whereas the OMGI approach does not, hence  $\rho$  increases when the sampling frequency decreases.

$\rho$  increases with the SNR. Actually, if the SNR tends towards zero, all estimators tend to be equivalent and if the SNR tends towards infinity, the phase estimation is better and provides thus a better prediction.

Our results can be directly compared to those obtained by Dessenne et al. with a modal temporal predictor<sup>14,43</sup> since we took similar simulation conditions. The two results are very close. It is not surprising since it corresponds to two different ways of implementing an efficient temporal prediction. The advantage of the Kalman approach is that it is easy to derive and avoids the stability constraints that have to be imposed in Dessenne's approach. In principle it is also more optimal since the optimization is global rather than mode per mode. Here however with our simplistic WFS model, and as mentioned in Sect. 5.B, the global control is probably almost equivalent to decoupled scalar loops. With real world WFS and DM models the global approach could still be interesting to deal with the usual "waffle-modes".

In a second step, as real systems have to compensate multi-layer Taylor turbulence, we wanted to apply a Kalman filter built on the first order AR prior-model to a Taylor turbulence and to quantify its performances. We already said in paragraph 5.A that in this case, we simulate the turbulence as three layers translating with a constant speed but in three different directions (0, 120 and 240°). A summation of the three screens gives the turbulent phase on the pupil. By projecting the resulting screen on the Zernike basis, we obtain the WFS measurements. One must keep in mind that we consider a sensor that

measures directly the Zernike coefficients.

The previous simulations were then made again for two cases. Case (1): the Kalman filter and OMGI applying on the AR phase-generation-model, Case(2): the Kalman filter and OMGI applying on the Taylor phase-generation-model. The prior-model used for Kalman is always the AR model, while, as mentioned in Sect. 5.A, the OMGI PSD model is derived from the phase-generation-model itself. The simulations are done in the conditions used for the equivalent wind speed estimation ( $\frac{v}{D} = 2$  Hz,  $f_{\text{samp}} 100$  Hz or  $a_1 = 0.99014$ ).

We have observed that the enhancement factor  $\rho$  is not sensitive to the turbulence generator used, i.e.  $\rho_{\text{Taylor}} = \rho_{\text{AR}}$ , where  $\rho_{\text{Taylor}}$  is deduced from cases (2) and (4) and  $\rho_{\text{AR}}$  is deduced from cases (1) and (3). This means that, even if the first order turbulence model is not optimal, the Kalman filter induced by this model does not lose its advantage on OMGI. This is a first argument to say that the Kalman filter is robust to model errors. The interest of using the Kalman approach is kept even if the evolution model is approximative. This is an important point, because it justifies *a posteriori* the use of the first order AR turbulent model. One should study if a higher order AR model could improve the Kalman performance.

#### 5.C.3. MCAO-like case, introduction of unseen modes and correction of these modes.

The gain given by the Kalman approach in the previous section is essentially linked to its ability to make a good temporal prediction. We now illustrate its ability to deal with unseen modes.

In the previous section, the same 2 to 105 Zernike polynomials were used to describe the turbulent phase, the measured phase and the correction phase. As we said, this means that the interaction matrix  $\mathbf{D}$  between the turbulent phase and the measured phase was the identity matrix.

We now artificially introduce unseen modes in a Classical AO case. To do so, we have chosen to use a matrix  $\mathbf{D}$  which mixes two polynomials. More precisely, we consider here that the WFS cannot distinguish  $Z_4$  and  $Z_{17}$ , and that it only measures the average of the corresponding Zernike coefficients.

If  $\{z_i\}$  are the coefficients of the turbulent phase on the Zernike basis, the measurement is then, apart from the noise:

$$y_4 = \frac{z_4 + z_{17}}{2}, \quad (51)$$

$$y_{17} = \frac{z_4 + z_{17}}{2}, \quad (52)$$

$$y_i = z_i \quad \text{for } i \neq 4 \text{ and } i \neq 17 \quad (53)$$

instead of  $y_i = z_i$  for all modes, like previously. With this matrix  $\mathbf{D}$  we create one unseen mode:  $Z_4 - Z_{17}$ . We chose those two modes because  $Z_4$ , a low order mode, is very energetic, while  $Z_{17}$ , a high order mode, is less energetic. Estimating correctly  $z_4$  and  $z_{17}$  is a problem which is then very similar to the MCAO unseen mode problem, presented in section 3.C.

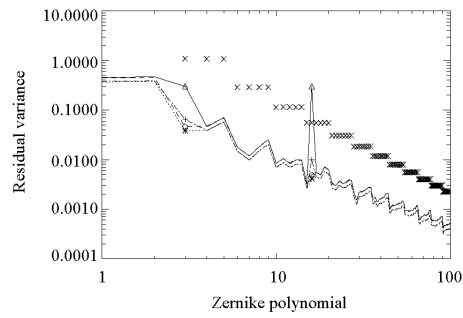


Fig. 5. Variance of the residual phase (in  $rad^2$ ) with unseen modes for a Kalman estimator [mixed line and +] or the OMGI approach [continuous line and  $\triangle$ ] and without unseen modes with the Kalman estimator [dotted line and \*] or the OMGI approach [dashed line and  $\diamond$ ]. The turbulent phase variance is also plotted for comparison [ $\times$ ]. As the piston mode is not considered here, the x-axis begins with the tilt mode.  $x=1$  stands for the tilt.

We present in Fig. 5 the variance of the residual phase mode by mode for the Kalman approach and for the OMGI in the presence of the unseen mode. We show as a reference the variances obtained in the case without unseen mode described in the previous section. In the reference case, the difference between the two methods is essentially due to the prediction step included in the Kalman filter. This is a modal illustration of the results of section 5.C.2.

In the case with unseen modes, the OMGI simply filters out the unseen modes and thus induces a large estimation error on both  $z_4$  and  $z_{17}$ . A first analytical estimation of this error can be provided by an open loop reasoning. The OMGI affects half of the measurement to each mode, because of the lack of prior information on the relative energy of modes 4 and 17. Thus, it over estimates the energy of  $z_{17}$  and under estimates the energy of  $z_4$ . This gives the following expected residual variances:

$$\sigma_{res,OMGI,z_4}^2 \simeq \sigma_{res,OMGI,z_{17}}^2 \simeq \frac{\sigma_{turb,z_4}^2}{4} + \frac{\sigma_{turb,z_{17}}^2}{4} \simeq \frac{\sigma_{turb,z_4}^2}{4}. \quad (54)$$

This is what is observed in Fig. 5. The variance of the turbulence phase is also plotted for comparison. Note that  $\sigma_{res,OMGI,z_{17}}^2$  is even larger than the turbulent variance.

The Kalman approach performs a global optimization which makes use of the spatial priors to estimate these two modes. The result corresponds to what was expected: the loss of performance is much smaller than in the OMGI case. We obtain, for  $z_4$ :  $\sigma_{res,OMGI,z_4}^2 = 0.3 \text{ rad}^2$  and  $\sigma_{res,kalman,z_4}^2 = 0.06 \text{ rad}^2$  while  $\sigma_{turb,z_4}^2 = 1.1 \text{ rad}^2$ . For  $z_{17}$ :  $\sigma_{res,OMGI,z_{17}}^2 = 0.3 \text{ rad}^2$  and  $\sigma_{res,kalman,z_{17}}^2 = 0.01 \text{ rad}^2$  while  $\sigma_{turb,z_{17}}^2 = 0.05 \text{ rad}^2$ .

In other words, it is the use of spatial correlations between the unseen modes, here  $Z_4 - Z_{17}$ , and the other modes that allow the Kalman estimator to conserve good performance.

This ability to deal with unseen modes will now be illustrated on MCAO simulations. Note that it could also be interesting in real classical AO systems, since unseen modes, the so-called “waffle modes”, generally appear with real world WFS and DM characteristics. The Kalman approach could then avoid the usual ad-hoc filtering procedures used in this case. It can also provide a better rejection of these modes, which is important for high dynamic AO.

#### 5.D. Simulations in Multiconjugate Adaptive Optics

##### 5.D.1. Simulation conditions

We first present the turbulence and system simulation conditions. We consider a two-layer atmosphere. The layer altitudes are 500 meters and 10 kilometers and the strength of the turbulence is 80% in the lower layer and 20% in the higher one. The global  $\frac{D}{r_0}$  is set to 9. For an 8 m telescope diameter,  $r_0 = 0.89 \text{ m}$  at  $2.2\mu\text{m}$  and  $\theta_0 = 8.59''$  at  $2.2\mu\text{m}$ , which is representative of astronomical sites.

To have the same maximum spatial frequency on the two layers, the number of Zernike radial orders in each layer should be proportional to the size of the pupil on the layer, the so called meta-pupil. The size of the meta-pupil is determined by the projections, on the

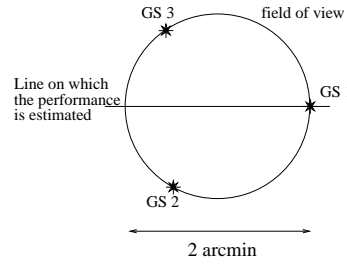


Fig. 6. Illustration of the guide stars geometry and of the directions on which the performances are estimated.

layer, of the telescope pupil in the whole FOV (2 arcminutes). The meta-pupil diameters are then respectively 8.3 m and 13.8 m at 500 m and 10 km. We chose a factor 2 between the number of radial orders on the lower and on the higher layers. We then created a turbulent phase composed of 13 radial orders in the first layer and 26 in the second one. The phase is generated layer by layer with an AR process in the same way as in Classical AO. The parameters  $a_1^{500m}$  and  $a_1^{10km}$  are both equal to 0.99104.

The results presented here correspond to an 8 m class telescope observing in the near infrared ( $2.2 \mu\text{m}$ ). We use for the wave front sensing three GSs located on the vertices of an equilateral triangle inscribed in FOV of 2 arcmin, as shown in Fig. 6. The SNR on Shack-Hartmann measurements<sup>38</sup> is equal to 10.

The sampling frequency is 100 Hz and the delay of the loop is two sampling periods. The WFS can measure 13 radial orders of Zernike polynomials and the noise on the measurements is representative of a  $12 \times 12$  microlenses Shack-Hartmann WFS. We use two DMs conjugated at 500 meters and 10 kilometers, that is, on the turbulent layers themselves and which can correct 13 radial orders for the lower one and 26 radial orders of Zernike polynomials for the higher one. The choice of the factor two between the number of corrected radial orders on the lower and the higher layers is motivated by the same reasons as previously for the turbulent phase (since the DMs are located at the same altitudes than the turbulent layers, the meta-pupils sizes are also identical).

We compute the variances of residual phase in different directions. In this computation, we take into account the Noll residual variance through Eq. (49) with  $n_{max} = 13$ .

We also present the Strehl Ratio [SR] which is approximated as the Coherent Energy  $\exp(-\sigma_{res}^2)$ . This is a good approximation for good corrections.

#### 5.D.2. Results and interpretations

We have compared the Kalman filter performance in the MCAO case with a new approach, the “Multiconjugate Optimized Modal Gain Integrator” [MOMGI], which is a generalization to the MCAO of the OMGI approach in classical AO.<sup>12,13</sup> The gains of the MOMGI are optimized (as explained in Section 5.C.2) in the basis of the eigen modes of  $(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})^T (\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})$ . As in Section 5.C.2, the gains of the MOMGI estimator have been thresholded to 0.5 for stability reasons.<sup>14</sup> We recall that  $\mathbf{M}_\beta^L$  is the matrix that performs the summation on the turbulent layers in all directions  $\beta$ . In this basis, the modes whose eigen values are low are badly seen and the modes whose eigen values are 0 are unseen. The lower the eigen value, the lower the gain on this mode. The optimized gains in this basis are plotted in Fig. 7. One must note that the number of lines of matrix  $\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N}$  is the total number of measured modes,  $3 \times 104 = 312$  modes (3 GSs, 104 Zernikes per GS, 13 radial orders without the piston mode). The number of columns is the total number of corrected modes,  $104 + 378 = 482$  modes (104 Zernikes for the first DM, 378 for the second one, corresponding to 15 radial orders). Matrix  $\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N}$  is then  $312 \times 482$ . This means that matrix  $(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})^T (\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})$  is  $482 \times 482$ . There are then 482 eigen modes and eigen values, but the rank of  $(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})^T (\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})$  is at most 312, which means there are at least  $482 - 312 = 170$  zeros in the eigen values. This is the reason why there are so many zeros in the gains observed in Fig. 7.

As we see the number of unseen modes in MCAO can be large, it is in fact a complex function of the GS number and geometry, and of the FOV of interest. In our case, with three GSs, we observe that there are many unseen modes. In classical AO unseen modes are less an issue since the systems are usually designed so that the number of correction modes is directly related to the number of measured modes.

As the gains decrease with the eigen values, the unseen modes are filtered out by the MOMGI approach, while the Kalman filter estimates them by using spatial *a priori* knowledge. As we know from previous works,<sup>6</sup> the estimation of unseen modes can be very critical for the performance of the system in the FOV between the GSs. We then expect a significant gain for the Kalman approach.

Fig. 8 shows the Strehl Ratio along a line joining the center of the GSs triangle and one of the GSs (as shown in Fig. 6) for the two approaches and for the Classical AO OMGI case. The difference of performance observed in the GS direction between the Kalman approach and the others is due to the temporal error. The Kalman approach we propose provides a prediction. The best performance is obtained for each case on the GS and degrades away

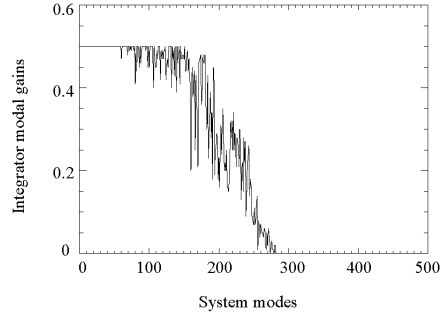


Fig. 7. The optimized modal gains in the MCAO case, in the basis of the eigen modes of  $(\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})^T (\mathbf{DM}_\beta^{DM} \mathbf{N})$ . Note that the effective x-axis range is the number of eigen modes, 482 in this case.

from it. Our approach provides a noticeable improvement compared to the MOMGI and a better interpolation between the GSs. The difference between the two corresponds to some percents of SR on the GS and ten percents on the border of the FOV.

We have also presented in Fig. 9 and 10 the variance of the residual phase on the pupil versus the Zernike mode in two directions, the GS direction and the center of the FOV. The deterioration of the integrator performance in the center of the FOV is obvious and is due to the presence of unseen or badly-seen modes.

It must be noted that we also performed the same MCAO simulation with a slightly irregular GS geometry (distance of the GSs from the center of the FOV equal to 50'', 60'', 70'' instead of 60'', 60'', 60''). The gain given by the Kalman approach is conserved even with such a geometry. Nevertheless, if the geometry is irregular and the number of GSs is large, unseen modes may be less numerous.<sup>29</sup>

#### 5.E. Discussion - Interest of the Kalman filter

It has been shown in the previous sections that a Kalman filter provides a significant benefit on the performance of an AO or MCAO system. Furthermore, many practical advantages are stressed here.

First of all, the state-space approach provides a rigorous framework for the use of spatial and temporal priors which are necessary to deal with unseen modes and the Kalman filter provides a fully optimal estimation with separation between estimation and control.

The question of the stability of the control, which was constraining the control laws



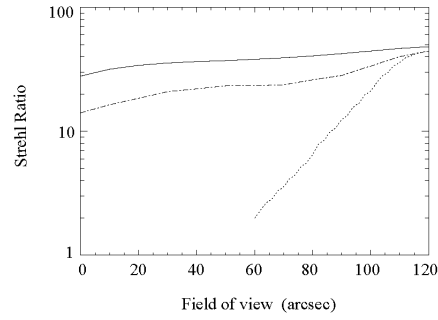


Fig. 8. Comparison between the Kalman approach [solid line], the MOMGI approach [mixed line] and the Classical AO case (dotted line). The Strehl Ratio (in %) is plotted versus the position in the FOV in arcseconds.

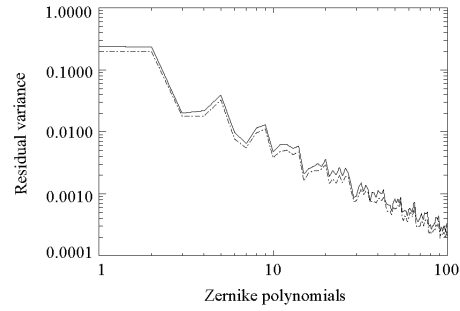


Fig. 9. The residual phase variance (in  $rad^2$ ) as a function of the Zernike mode for the Kalman approach [mixed line] and the MOMGI approach [solid line], on a Guide Star. As the piston mode is not considered here, the x-axis begins with the tilt.  $x=1$  stands for the tilt.

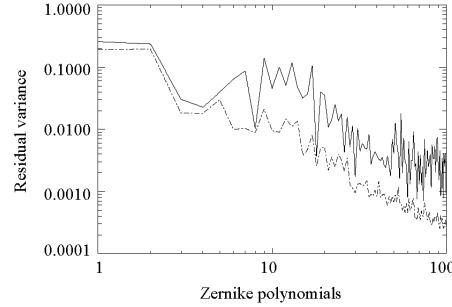


Fig. 10. The residual phase variance (in  $rad^2$ ) as a function of the Zernike mode for the Kalman approach [mixed line] and the MOMGI approach [solid line], on the center of the field of view. As the piston mode is not considered here, the x-axis begins with the tilt.  $x=1$  stands for the tilt.

previously proposed<sup>12–14</sup> can be avoided while the model used in the Kalman filtering is stable itself.<sup>19</sup> Secondly, it has been explained that the Kalman approach uses a physical description of the system via the state equations, Equations (28) and (29). Any kind of control uses implicitly a model for the turbulence evolution and the measurement. In the approach proposed, we explicitly write this model. This allows to make physical interpretations of the control law and to understand physically the behavior of the control.

It becomes then easy to introduce in the system model any pertinent parameter or behavior. We have shown this for the problem of static aberrations. To take these aberrations into account, it is only needed to adapt the model equations, which does not change the structure of the control. In the same way, various phenomena generally limiting AO performance can be introduced in the model to take them into account. For instance aliasing, vibrations of the telescope or mis-calibrations can be handled efficiently by introducing them into the state equations, Equations (28) and (29).

We have already suggested in the paper that it is not necessary to get a very precise knowledge on the priors used in the Kalman filter (section 5.C.2). This is a classical issue of regularized estimation and we have already observed in<sup>44</sup> that the spatial prior knowledge precision is not critical in open loop MCAO.

We therefore used a temporal turbulent model that does not require to know the wind direction in each layers, which would be in practice quite difficult to get. Imposing the DSP on each mode is informative enough and gives, as we saw in this paper, very good results.

## 6. Conclusion

We have presented in this paper an optimal closed loop control law for Multiconjugate Adaptive Optics. MCAO control needs to deal with a larger number of degrees of freedom than classical AO and needs a more complex process for estimating the turbulent phase. The solution we propose is a global approach, by opposition to the previous modal approaches, based on a linear state space model with a Kalman estimator. This approach gives an optimal estimation of the turbulence in closed loop. It incorporates both spatial and temporal information on the turbulent phase, as well as information on the system noise statistics, through the so-called state space model. The temporal priors allow to make good prediction of the turbulent evolution, while the spatial priors allow to deal with the unseen modes. Furthermore, this approach is flexible enough to allow to take easily into account various physical parameters or phenomena.

We have shown through a numerical simulation that this approach gives much better results than the usual techniques. The performance has been quantified in classical and multiconjugate AO and compared to those given by the Optimized Modal Gain Integrator approach. The major gain comes from the prediction in Classical AO and from the estimation of unseen modes in MCAO.

It is the first time that a Kalman-based approach is proposed for MCAO. It would allow to optimize the future MCAO systems, such as MAD<sup>45–47</sup> or FALCON<sup>48,49</sup> projects, and to relax technical constraints on those projects. This approach should be also very promising for very high Strehl Ratio AO systems since it can potentially handle efficiently various effects generally limiting classical AO performance.<sup>50–52</sup>

Corresponding author Brice Le Roux may be reached by e-mail at [leroux@arcetri.astro.it](mailto:leroux@arcetri.astro.it)

## References

1. R. Dicke, “Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction,” *Astrophys. J.* **198**, 605–615 (1975).
2. J. Beckers, “Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics,” in *Very Large Telescopes and their Instrumentation* (M.-H. Ulrich, ed., Garching), Vol. 2 of ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 693–703, 1988.
3. M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin, “3-d wavefront sensing and multiconjugate adaptive optics,” in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies* (M.-H. Ulrich, ed., Garching), Vol. 42 of ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 517–521, 1992.
4. B. L. Ellerbroek, “First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes,” *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 783–805 (1994).
5. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier, and G. Rousset, “Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics,” *Opt. Lett.* **24**, 1472–1474 (1999).

6. T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L. Mugnier, and V. Michau, "Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 2527–2538 (2001).
7. M. Le Louarn, "Étoiles laser pour les grands télescopes : effet de cône et implications astrophysiques," Ph.D. thesis, Université Lyon I - Claude Bernard, Lyon, 2000.
8. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and F. Rigaut, "Modal tomography for adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **342**, 53–56 (1999).
9. R. Ragazzoni, "No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **136**, 205–209 (1999).
10. F. Rigaut, B. Ellerbroek, and R. Flicker, "Principles, limitations and performance of multi-conjugate adaptive optics," in *Adaptive Optical Systems Technology*, P. L. Wizinowich, ed., **4007**, 1022–1031 (SPIE, Bellingham, Washington, 2000).
11. A. Tokovinin, M. Le Louarn, and M. Sarazin, "Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1819–1827 (2000).
12. E. Gendron and P. Léna, "Astronomical Adaptive Optics I. Modal control optimization," *Astron. Astrophys.* **291**, 337–347 (1994).
13. E. Gendron and P. Léna, "Astronomical Adaptive Optics II. Experimental results of an optimize modal control," *Astron. Astrophys.* **111**, 153–167 (1994).
14. C. Dessenne, P.-Y. Madec, and G. Rousset, "Optimization of a predictive controller for the closed loop adaptive optics," *Appl. Opt.* **37**, 4623–4633 (1998).
15. B. L. Ellerbroek, T. A. Rhoadarmer, "Optimizing the performance of closed-loop adaptive-optics control systems on the basis of experimentally measured performance data," *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1975–1987 (1997).
16. T. A. Ellerbroek, B. L. and Rhoadarmer, "Adaptive wavefront control algorithms for closed loop adaptive optics," *Mathematical and Computer Modelling* **33**, 145–158, 2001.
17. H. Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I* (Wiley, New York, 1968).
18. A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 3rd ed.* (McGraw-Hill, New York, 1991).
19. B. Anderson and J. Moore, *Optimal control, linear quadratic methods* (Prentice Hall, London, 1990).
20. R. Paschall and D. Anderson, "Linear quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements," *Appl. Opt.* **32**, 6347–6358 (1993).
21. D. Gavel and D. Wiberger, "Toward Strehl-Optimizing Adaptive Optics Controllers," in *Adaptive optical system technologies II*, P. L. Wizinowich, ed., **4839**, 890–901 (SPIE Bellingham, Washington, 2002).
22. P.-Y. Madec, "Control techniques," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), Chap. 6, pp. 131–154. See Ref.<sup>23</sup>

23. *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
24. M. Séchaud, "Wave-front compensation devices," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), Chap. 4, pp. 57–90. See Ref.<sup>23</sup>
25. R. Flicker, F. Rigaut, and B. Ellerbroek, "Comparison of multiconjugate adaptive optics configurations and control algorithms for the gemini-south 8-m telescope," in *Adaptive Optical Systems Technology* (W. Bellingham, ed., Garching), Vol. 4007 of ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 1032–1043, 2000.
26. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, and F. Assémat, "Multi-conjugate adaptive optics: Comparison of phase reconstruction approaches for large field of view," in *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VI*, P. L. Wizinowich, ed., **4167**, 168–179 (SPIE, Bellingham, Washington, 2001).
27. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, and G. Rousset, "Noise propagation for Multiconjugate adaptive Optics systems," in *Optics in atmospheric Propagation and Adaptive Systems IV*, A. Kohnle, J. D. Gonglewski, and T. J. Schmugge, eds., **4538**, 144–155 (SPIE, Bellingham, Washington, 2002).
28. M. Le Louarn, "Multiconjugate Adaptive Optics: a PSF study," in *Beyond Conventional Adaptive Optics* (S. Esposito and R. Ragazzoni, eds., Garching), Vol. 58 of ESO Conference and workshop proceedings, pp. 217–222, 2001.
29. E. Diolaiti, C. Arcidiacono, R. Ragazzoni, and E. Fedrigo, "Identification and rejection of waffle modes in layer-oriented adaptive optics," in *Adaptive Optical System Technologies II*, P. L. Wizinowich, ed., **4839**, 1001–1010 (SPIE, Bellingham, Washington, 2003).
30. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, and L. Mugnier, "Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics," in *Adaptive Optical Systems Technology*, P. L. Wizinowich, ed., **4007**, 1044–1055 (SPIE, Bellingham, Washington, 2000).
31. J.-M. Conan, G. Rousset, and P.-Y. Madec, "Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence," *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1559–1570 (1995).
32. T. Fusco, "Correction partielle et anisoplanetisme en Optique Adaptative : traitements a posteriori et Optique Adaptative Multiconjuguée," Ph.D. thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, 2000.
33. P. S. Maybeck, "Stochastic Models, Estimation and Control, Vol. 3" (Academic Press, New York, 1982).
34. B. Mc Glamery, "Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images," in *Image processing* **74**, 225–233, (SPIE, Bellingham, Washington, 1976).
35. F. Roddier, M. J. Northcott, J.-E. Graves, D. L. McKenna, D. Roddier "One dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations: time-delay and isoplanicity error in partial adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 957–965 (1993)

36. P.-Y. Madec, J.-M. Conan, G. Rousset, "Temporal characterisation of atmospheric wavefront for adaptive optics," in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies* (Garching), Vol. 42 of ESO conference and workshop Proceedings, pp. 471–474, 1992
37. G. Rousset, "Wave-front sensors," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), Chap. 5, pp. 119, paragraphe 5.5.2 . See Ref..<sup>23</sup>
38. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptative optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, 677–684 (1992).
39. J.-M. Conan, "Etude de la correction partielle en Optique Adaptative," Ph.D. thesis, Université Paris XI., Paris, 1994.
40. R. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 207–211 (1976).
41. E. Gendron, "Optimisation de la commande modale en optique adaptative : Application a l'astronomie," Ph.D. thesis, Université Paris VII, Paris, 1995.
42. G. Rousset and F. Lacombe and P. Puget and E. Gendron and N. Hubin and G. Zins and E. Stadler and J. Charton and P. Gigan and P. Feautrier, "Status of the VLT Nasmyth adaptive optics system (NAOS)," in *Adaptive Optical Systems Technology*, P. L. Wizinowich, ed., **4007**, 72–81, (SPIE, Bellingham, Washington, 2000).
43. C. Dessenne, "Commande modale et prédictive en optique adaptative classique," Ph.D. thesis, Université Paris VII, Paris, 1998.
44. J.-M. Conan, B. Le Roux, D. Bello, T. Fusco, and G. Rousset, "Multiconjugate Adaptive Optics: performance with optimal wavefront reconstruction," in *Beyond Conventional Adaptive Optics* (S. Esposito and R. Ragazzoni, eds., Garching), Vol. 58 of ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 209–215, 2001.
45. N. Hubin, E. Marchetti, E. Fedrigo, R. Conan, R. Ragazzoni, E. Diolaiti, M. Tordi, G. Rousset, T. Fusco, P.-Y. Madec, D. Butler, S. Hippler, and S. Esposito, "The ESO MCAO demonstrator MAD : a european collaboration," in *Beyond Conventional Adaptive Optics* (S. Esposito and R. Ragazzoni, eds., Garching), Vol. 58 of ESO Conference and Workshop Proceedings , pp. 27–35, 2001.
46. E. Vernet-Viard, R. Ragazzoni, C. Arcidiacono, A. Baruffolo, E. Diolaiti, J. Farinato, E. Fedrigo, E. Marchetti, R. Falomo, S. Esposito, M. Carillet, and C. Vérinaud, "Layer oriented wavefront sensor for mad : Status and progress," in *Adaptive Optical System Technologies II*, D. Bonaccini and P. L. Wizinowich, eds., **4839**, 344–353 (SPIE, Bellingham, Washington, 2003).
47. F. Rigaut, M. Chun, B. Ellerbroek, and C. D'Orgeville, "MCAO for Gemini South," in *Conceptual Design Review Documents*, MCAO Conceptual Design Documentation, 2000.
48. F. Hammer, F. Sayède, E. Gendron, T. Fusco, D. Burgarella, V. Cayatte, J.-M. Conan, F. Courbin, H. Flores, I. Guinouard, Jocou, A. Lançon, G. Monnet, M. Mouhcine, F.

- Rigaud, D. Rouan, G. Rousset, V. Buat and F. Zamkotsian, “The FALCON Concept: Multi-Object Spectroscopy Combined with MCAO in Near-IR,” in *Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI* (Garching), Vol. 42 of ESO conference and workshop Proceedings, pp. 139, 2002.
49. F. Assémat, F. Hammer, E. Gendron, F. Sayède, P. Laporte, M. Marteaud, M. Puech, J. -M. Conan, T. Fusco, F. Zamkotsian, “FALCON: a new generation spectrograph with adaptive optics for the ESO VLT,” in *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VI*, J. D. Gonglewski and K. Stein, eds., **5237** (SPIE, Bellingham, Washington, 2003).
  50. B. A. Macintosh, S. Olivier, B. Bauman, J. Brase, E. Carr, C. Carrano, D. T. Gavel, C. E. Max and J. Patience, “Practical high-order adaptive optics systems for extrasolar planet searches,” in *Adaptive Optical Systems and Technologies II* M. C. Roggeman R. K. Tyson and D. Bonaccini, eds. , **4494**, 60–68, (SPIE, Bellingham, Washington, 2002).
  51. D. Mouillet, A.-M. Lagrange, J.-L. Beuzit, F. Ménard, C. Moutou, T. Fusco, L. Abé, T. Gillot, R. Soummer, and P. Riaud, “VLT Planet Finder: Specifications for a ground-based high contrast imager,” in *Scientific Highlights 2002*, F. Combes and D.Barret, ed., EDP Sciences, SF2A, 2002.
  52. D. Mouillet, T. Fusco, A.-M. Lagrange, and J.-L. Beuzit, “Planet Finder on the VLT: context, goals and critical specification for adaptive optics,” In *European Astronomical Society – publication series*, 2002.

## Chapitre 4

# Validation expérimentale, la manip MCAO

On va présenter dans ce chapitre la mise en place d'un système expérimental sur le banc d'optique adaptative de l'ONERA. Ces travaux ont été menés en collaboration avec Sylvain Oberti [Obe02]. Le but de cette démarche est de valider les concepts liés à l'OAMC. Un système d'optique adaptative classique effectue une correction sur-axe à partir d'une analyse sur-axe. L'objectif de la manip proposée est d'effectuer une correction hors-axe dans une direction d'intérêt à partir d'une analyse sur-axe. Le banc BOA disponible à l'ONERA comporte un miroir déformable (MD) conjugué de la pupille et commandé à partir des mesures effectuées par un analyseur de surface d'onde (ASO) sur-axe. Le banc MCAO développé pour les validations expérimentales en question dans ce chapitre reprend la structure du banc BOA et n'utilise donc qu'une seule EG et un seul MD. On a également choisi de générer une turbulence composée d'une seule couche. Dans une première étape, la turbulence sera figée (cas statique). Elle évoluera dans le temps dans une deuxième étape. Le système que l'on va présenter ici ne correspond donc pas à proprement parler à de la multiconjugaison. On pourrait plutôt parler de monoconjugaison. Il permettra néanmoins de valider les concepts de multiconjugaison et notamment l'utilisation d'un estimateur optimal de la phase turbulente hors-axe tel que celui que nous avons proposé dans les précédents chapitres.

Dans ce chapitre, les objectifs de notre démarche expérimentale sont tout d'abord présentés. On décrit le banc optique et ses éléments, le générateur de turbulence, l'injection des sources lumineuses, l'analyseur et le miroir déformable. La démarche expérimentale est ensuite détaillée.

### 4.1 Objectifs d'une mise en œuvre expérimentale

Il s'agit dans ce paragraphe de justifier et de motiver une approche expérimentale en précisant ses apports vis-à-vis d'une simulation numérique.

Il est tout d'abord clair que, dans toute simulation, certaines hypothèses sont faites qu'il convient de valider expérimentalement. C'est le cas notamment d'instruments fonctionnant dans des conditions différentes de l'usage habituel, l'analyseur de surface d'onde par exemple. On suppose en effet en simulation que l'ASO fonctionne dans son domaine de linéarité. En réalité, dans un système qui optimise la correction hors-axe, et donc en OAMC, la mesure de l'ASO n'est pas nécessairement proche de zéro. Il reste à vérifier que l'analyseur se comporte alors comme on s'y attend.



Une deuxième différence notable de la mise en oeuvre du filtre de Kalman que l'on propose vis-à-vis des systèmes habituels réside dans l'utilisation directe des modèle d'ASO et de miroir au lieu de la matrice d'interaction. Il est donc important de valider expérimentalement les procédures de calibration de ces modèles. On devra également quantifier les erreurs de calibration et l'effet de ces erreurs sur la performance du système. On a présenté dans les chapitres précédents l'application du filtrage de Kalman aux problèmes de l'Optique Adaptative classique et multiconjuguée. En pratique, pour pouvoir mettre en oeuvre cet estimateur, il faut commencer par déterminer les matrices et les paramètres qui caractérisent le modèle d'état. Pour ce qui concerne l'évolution de la turbulence, il faut fixer les paramètres du modèle. Pour ce qui est du système lui-même, il est décrit dans le modèle d'état à l'aide du modèle ASO  $\mathbf{D}$  et de  $\mathbf{N}$ , le modèle miroir. On pourra tester notre connaissance de ces matrices sans même fermer la boucle. Le produit  $\mathbf{ND}$  est effectivement théoriquement égal à la matrice d'interaction  $\mathbf{D}_{int}$ . Si on vérifie cette propriété avec les modèles obtenus expérimentalement, on aura validé la démarche de calibration de l'ASO et du miroir.

Même si on suppose connaître avec une certaine précision la valeur de  $r_0$ , la répartition du  $C_n^2$ , il reste toujours à fixer la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  la mieux adaptée à la turbulence que l'on veut corriger. Même si une bonne part de cette étude peut être faite en simulation numérique, il faudra choisir une procédure de calibration expérimentale de  $\mathbf{A}_{tur}$  à partir de mesures boucle ouverte et vérifier que le bruit sur ces mesures n'est pas limitant.

On peut alors décomposer la manip en deux étapes. Dans la première, statique, la turbulence n'évolue pas et la mesure est faite en boucle ouverte. A part pour ce qui concerne  $\mathbf{A}_{tur}$ , on peut en effet valider les procédures de calibration des modèles sur un système statique. On réalisera ainsi l'optimisation sur-axe puis hors-axe. Cela permettra de valider d'un seul coup l'utilisation et la connaissance des matrices  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{N}$  et de  $r_0$ . On a représenté en figure 4.1 le schéma de principe de la correction hors-axe.

Ce n'est qu'ensuite qu'il deviendra nécessaire de passer à un système dynamique, dans lequel on ferait évoluer la turbulence et la mesure serait faite en boucle fermée. On validera de cette façon la procédure de calibration de  $\mathbf{A}_{tur}$  et de façon plus générale la mise en oeuvre du filtrage de Kalman proposé dans ce mémoire. On a déjà parlé de la prise en compte des aberrations statiques dans l'estimation optimale par filtrage de Kalman. D'autres phénomènes physiques à prendre en compte ne manqueront pas d'apparaître lors de la mise en oeuvre. Une démonstration expérimentale de la faisabilité de l'OAMC avec filtrage de Kalman est donc nécessaire de ce point de vue-là.

## 4.2 Le banc optique et ses éléments

### 4.2.1 Présentation générale du banc

On a représenté sur la figure 4.2 le schéma simplifié du banc MCAO. On dispose de deux sources non résolues de séparation angulaire  $\alpha$  inférieure au champ image afin de pouvoir observer les deux sources sur la voie imagerie. La turbulence est simulée à l'aide d'une lame de phase en réflexion à  $45^\circ$  (représentée en transmission par commodité sur le schéma) dont la structure spatiale suit une statistique de Kolmogorov. La couche turbulente équivalente est conjuguée hors pupille, de sorte que les fronts d'onde issus des deux sources ne traversent pas la même zone turbulente.

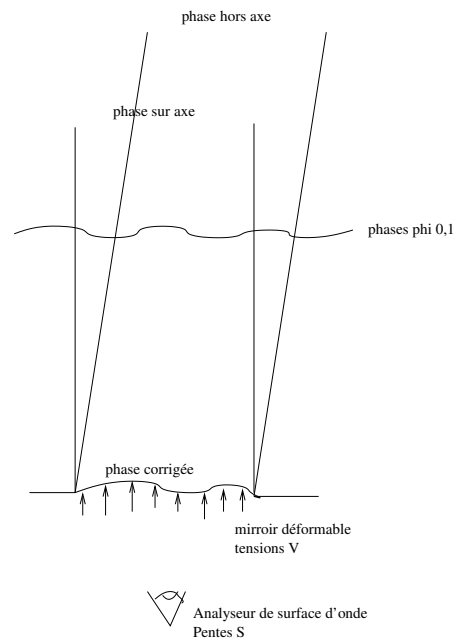


FIG. 4.1 – Schéma de principe de la correction hors-axe

## L'expérience MCAO

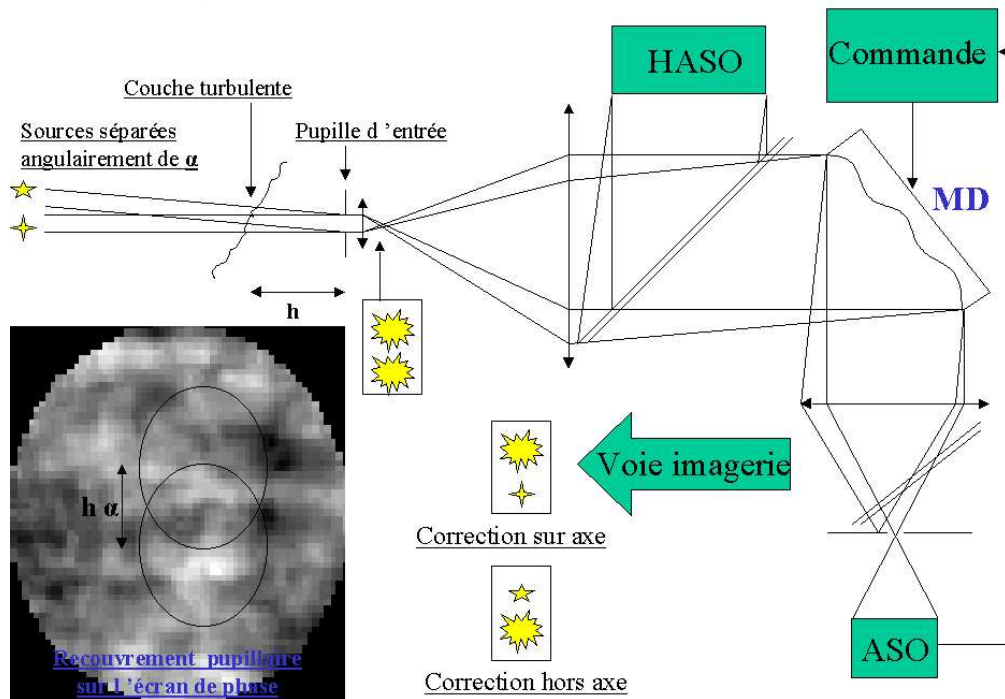


FIG. 4.2 – Schéma général du banc optique

Les projections de la pupille sur l'écran de phase suivant la direction des deux étoiles se recouvrent plus ou moins selon la distance  $h$  entre la pupille et l'écran. En jouant sur cette distance, on peut donc faire varier le recouvrement entre les deux zones de l'écran de phase "vues" sur-axe et hors-axe depuis le recouvrement nul jusqu'au recouvrement total. Ceci permet donc de se placer dans différentes conditions d'anisoplanétisme et de scintillation. Dans l'exemple du schéma 4.2, le recouvrement est de 50% en diamètre. Le paramètre  $h$  correspond dans un système équivalent sur le ciel à l'altitude de la couche turbulente.

On utilise le MD pour corriger la phase à partir des mesures de résidus de l'ASO faible bruit placé derrière. Le MD et la matrice de microlentilles de l'ASO sont conjugués de la pupille d'entrée. Un diaphragme de champ en amont de l'ASO sélectionne une étoile guide sur-axe pour l'analyse. Une lame dichroïque sépare la voie ASO de la voie imagerie où peuvent être visualisées les réponses impulsionnelles sur- et hors-axe.

On utilise de plus pour contrôler la phase incidente sur le miroir déformable l'analyseur de type Shack-Hartmann dit HASO, développé par Imagine Optics. Il s'agit d'un Shack-Hartmann à haute résolution spatiale (64 sous-pupilles). Il peut être utilisé pour régler le banc et au cours de l'expérience en tant que validation de la mesure sur-axe et de l'extrapolation hors-axe de la phase.

Le résultat attendu est symbolisé sur la figure 4.2 par deux "taches" de tailles différentes dans la pupille et en sortie et suivant si on optimise la correction sur-axe ou hors-axe. Au premier foyer, la turbulence a dégradé l'image dans les deux directions. Si on optimise sur-axe (cas OA classique), on retrouve idéalement sur-axe la résolution donnée par la limite de diffraction, dans l'autre direction, la correction est moins bonne. C'est l'effet d'anisoplanétisme. Sur la figure, cet effet a été volontairement exagéré, puisque la tache hors-axe  $y$  est la même que celle en entrée du banc.

Si on optimise hors-axe, on doit trouver idéalement le schéma inverse, à savoir une résolution limitée par la diffraction hors-axe et une résolution dégradée sur axe, provenant de l'anisoplanétisme. En réalité, même un filtrage de Kalman ne permet pas d'obtenir la même performance hors-axe que celle qu'on a sur l'étoile guide en optimisant sur-axe. On s'attend néanmoins à améliorer sensiblement la résolution hors-axe au prix d'une dégradation sur l'étoile d'analyse.

### 4.2.2 Le générateur de turbulence

On a choisi de simuler la turbulence atmosphérique sur les faisceaux du banc optique MCAO avec une des lames de phase en réflexion utilisées lors de la phase d'intégration du système NAOS. Ces lames de phase ont été conçues au DASGAL (observatoire de Paris).

On souhaite ici dimensionner le système pour qu'il soit équivalent à un télescope de type VLT (8 m de diamètre) dans l'infra-rouge (domaine de longueur d'onde plus favorable du point de vue de l'OA). Le banc MCAO repose sur l'architecture du banc d'optique adaptative BOA. Ainsi, le choix de la dimension de la pupille et de la majorité des paramètres optiques et géométriques du banc sont fortement influencés par les contraintes liées au banc BOA existant. En particulier, dans l'espace d'entrée où doivent être intégrés les systèmes d'injection des sources et de simulation de la turbulence, il faut tenir compte de l'ouverture d'entrée du système, de la position de la pupille, du champ disponible et de la compacité. En fonction de ces paramètres, nous avons finalement été amenés à choisir un diamètre de pupille de :

$$D = 0,86 \text{ mm.} \quad (4.1)$$

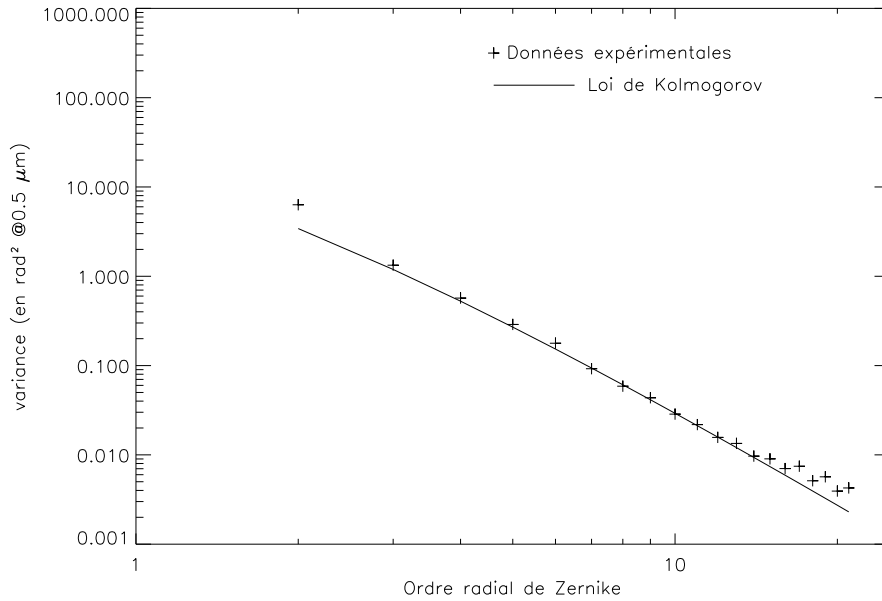


FIG. 4.3 – Caractérisation de l'écran de phase. La variance est tracée en fonction de l'ordre radial de Zernike. La loi théorique de Kolmogorov est représentée pour comparaison.

Avant de l'utiliser et afin de dimensionner le reste du système correctement, il faut caractériser la lame de phase disponible. Il s'agit de mesurer son  $r_0$ . Cette mesure a été effectuée avec l'instrument HASO, avec lequel on a analysé un faisceau LASER He-Ne collimaté et balayant en incidence normale la surface de l'écran de phase. Le HASO mesure la pente de la phase sous-pupille par sous-pupille. Il est possible à partir de ces mesures de remonter au front d'onde. On a finalement projeté la phase ainsi mesurée sur les polynômes de Zernike. Il faut noter que le montage optique ne permet pas de mesurer le Tilt. Ainsi, nous n'avons utilisé que les ordres radiaux allant de 2 à 10 pour calculer le  $r_0$ . La caractérisation a été faite sur une pupille de 5 mm.

On a représenté sur la figure 4.3 la variance de phase en fonction de l'ordre radial  $n$  de Zernike à  $0,5\mu\text{m}$  sur une pupille de 5 mm. Pour un ordre radial compris entre 2 et 10, la variance varie en  $(n + 1)^{-11/3}$ , ce qui correspond bien au comportement de la variance spatiale d'une turbulence Kolmogorov. On obtient un  $r_0^{mes}$  de 0,23 mm (à  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ ).

La lame de phase est en fait utilisée sur le banc MCAO en éclairage incident à  $45^\circ$ . Le  $r_0$  vu par notre ASO est alors différent. Le chemin optique est multiplié par  $\sqrt{2}$  et la phase également. On obtient le  $r_0$  effectif en divisant le  $r_0^{mes}$  mesuré par  $2^{3/5}$ . On obtient alors pour  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$  :

$$r_0 = 0,155 \text{ mm.} \quad (4.2)$$

On trouve alors  $D/r_0 = 5,5$ . Cela correspond bien aux conditions que l'on souhaitait reproduire, à savoir celle d'un télescope de 8 m dans l'infra-rouge en présence d'une turbulence typique.

Il reste à déterminer l'angle de champ  $\alpha$  entre les deux sources en entrée du banc. Le choix de l'angle  $\alpha$  fixe en fait la valeur de l'altitude de la couche  $h$  pour un diamètre  $D$  et un découvrément  $n$

connus. Le champ d'imagerie du banc BOA et la volonté de concevoir un système de qualité optique limite la valeur de l'angle  $\alpha$ . On a alors été conduit à considérer un angle  $\alpha = 2^\circ$ .

Pour que des conditions d'observation astronomique réelles puissent être dites équivalentes aux conditions expérimentales de la manip, les paramètres  $\frac{D}{r_0}$ ,  $\frac{\alpha h}{D}$  et  $\frac{D^2}{\lambda h}$  doivent être conservés dans le passage de l'un à l'autre. Le paramètre  $h$  représente l'altitude de la couche turbulente,  $\alpha$  l'angle entre les étoiles et  $D$  le diamètre du télescope. Le paramètre  $\frac{\alpha h}{D}$ , noté  $r_{pup}$  dans la suite, représente le découvrement des pupilles projetées sur la couche turbulente. Le rapport  $\frac{D}{r_0}$  est caractéristique de l'effet de la turbulence sur l'imagerie et  $\frac{D^2}{\lambda h}$  représente la conservation de l'angle solide par unité de diffraction ( $\frac{\alpha}{\lambda/D}$ ).

On choisit un recouvrement de  $r_{pup} = 4\%$  (soit  $h = 1\text{mm}$ ). Deux paramètres sur trois sont donc fixés ( $r_{pup}$  et  $D/r_0$ ). La longueur d'onde expérimentale est  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ . Alors, d'après l'hypothèse de conservation de  $\frac{D^2}{\lambda h}$ , on a :

$$h' = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot h. \quad (4.3)$$

La distance choisie entre la pupille du banc et l'écran de phase donne alors une distance équivalente pupille - couche turbulente dans le cas réel VLT de :

$$h' = 19,67\text{km} \quad (4.4)$$

soit un angle de :

$$\alpha' = 3,36''. \quad (4.5)$$

Dans un cas de turbulence monocouche, les effets d'anisoplanétisme ne dépendent que de la valeur du recouvrement et de la force de la turbulence. Pour une turbulence multicouche, cela dépendrait également, pour la même force de turbulence globale, de la répartition en altitude de la turbulence et donc des altitudes de chacune des couches (la turbulence dans une couche au sol, notamment, ne produit pas d'anisoplanétisme). Dans le cas présent, on pourra toujours faire varier le recouvrement des pupilles pour se placer dans un cas acceptable d'anisoplanétisme.

Du point de vue de la scintillation, toute la turbulence étant concentrée sur une seule couche à très haute altitude, les conditions sont plus sévères. En effet, dans un cas réaliste, la turbulence serait répartie dans le volume et la distance de propagation de Fresnel serait plus faible. De plus, on n'a pas de marge de manœuvre pour compenser ce phénomène, la distance  $h$  entre l'écran et la pupille étant le paramètre par lequel on fait varier le recouvrement des pupilles.

Le simulateur de turbulence, tel qu'il a été conçu, risque donc de créer un fort effet scintillant. Cet effet a été quantifié expérimentalement par la mesure du taux de scintillation pour différentes positions de la pupille par rapport à l'écran. Cette mesure est une calibration de l'effet de scintillation sur la voie ASO. La figure 4.4 représente les cartes d'intensité mesurées pour différentes distances pupille-écran en lumière blanche. Les courbes de variation du taux de scintillation en fonction de la distance pupille-écran sont représentées sur la figure 4.5 en lumière blanche mais aussi en lumière laser. Les courbes théoriques sont représentées pour comparaison. Dans les applications astronomiques, la lumière est blanche mais dans la manip, il peut être intéressant d'utiliser un laser. La scintillation est dans ce dernier cas un peu plus importante qu'en lumière blanche.

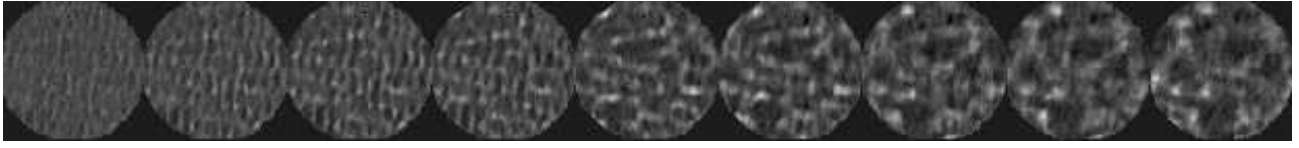


FIG. 4.4 – Cartes d'intensité dans la pupille de sortie mesurée sur la caméra en lumière blanche pour différentes distances entre l'écran de phase et la pupille : 1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 19, 23 mm

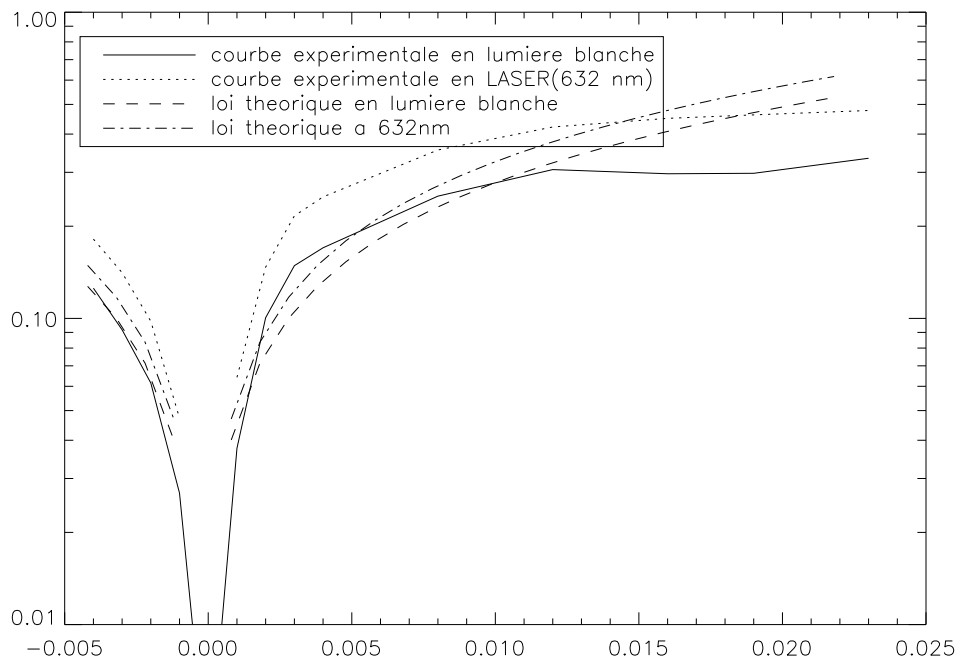


FIG. 4.5 – Taux de scintillation dans la pupille pour différentes distances entre l'écran de phase et la pupille (en m). Les courbes théoriques ont été tracées pour un  $r_0$  de 0,13mm plus faible que le  $r_0$  prévu (0,155mm). La pupille est donc située sur une zone de l'écran plus "scintillante" que la moyenne.

L'approximation des faibles perturbations n'est plus valable à partir d'une distance  $h$  de l'ordre de 10 mm. Au delà, la scintillation entre dans le régime de saturation. En conclusion, la scintillation est effectivement importante sur le banc MCAO. Son effet sur l'analyse de front d'onde devra être évalué.

### 4.2.3 La voie d'analyse

#### 4.2.3.1 Dimensionnement du SH

La caméra utilisée pour l'ASO est une CCD nu à 80\*80 pixels. La matrice de microlentilles est composée de 8\*8 microlentilles afin d'échantillonner suffisamment le front d'onde pour un pas de 240 microns et 10\*10 pixels par sous-pupille garantissant une bonne sensibilité de la mesure. Il reste à déterminer la focale de ces microlentilles. Elle doit représenter le meilleur compromis entre la sensibilité souhaitée et la dynamique de  $r_0$  analysable.

Le calcul de la focale des micro-lentilles prend en compte la taille et le déplacement de la tache image sur la caméra. Cela nécessite de connaître les fluctuations des angles d'arrivée. On se place à une longueur d'onde de 0,5  $\mu\text{m}$ . On a dit au paragraphe 4.2.2 que  $\frac{D}{r_0} = 5,5$ , alors  $(\frac{d}{r_0})_{0,5\mu\text{m}} = 0,69$ , avec  $d = D/8$ , la taille d'une sous-pupille dans le plan pupille. L'écart-type des fluctuations des angles d'arrivée sur-axe quand l'ASO analyse directement la turbulence s'exprime en radians sur le ciel comme :

$$\sigma_{aa}^{turb.pure} = 1,7 \cdot \left( \frac{\lambda}{\pi \cdot d} \right) \cdot \left( \frac{d}{r_0} \right)^{5/6}. \quad (4.6)$$

Dans notre cas (cas anisoplanétique), l'analyseur voit, si le système est correctement optimisé, la phase sur-axe  $\phi_0$  corrigée par le miroir de la phase hors-axe  $\phi_\alpha$ . On détermine d'abord la variance de la phase sur les modes de Zernike,  $\langle \phi_i^2 \rangle = \langle (\phi_{0,i} - \phi_{\alpha,i})^2 \rangle$  pour un angle donné  $\alpha$  entre les deux directions et les covariances  $\langle \phi_i \phi_k \rangle$ .  $\phi_i$  est le coefficient de Zernike pour le mode  $i$ . On relie ensuite la variance de la phase à la variance des angles d'arrivée correspondante par la relation :

$$\left\langle \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 \right\rangle_{aniso} = \langle (\sum_i \phi_i \gamma_{i1}^u)^2 \rangle_{aniso} \quad (4.7)$$

$$= \sum_i^\infty (\gamma_{i1}^u)^2 \langle \phi_i^2 \rangle_{aniso} + \sum_{i>k} \sum_k^\infty \gamma_{i1}^u \gamma_{k1}^u \langle \phi_i \phi_k \rangle_{aniso} \quad (4.8)$$

avec  $u = \frac{x}{d/2}$  et où les  $\gamma_{ij}^u$  sont définis dans [Nol76] par la relation :

$$\frac{dZ_i}{du} = \sum_j \gamma_{ij}^u Z_j \quad (4.9)$$

avec  $j < i$ , où les  $Z_i$  sont les polynômes de Zernike.  $\langle \phi_i^2 \rangle_{aniso}$  et  $\langle \phi_i \phi_k \rangle_{aniso}$  représentent les variance et covariance des coefficients de la phase sur-axe moins la phase hors-axe pour une séparation  $\alpha$  donnée entre les deux directions. Si on considère que le miroir corrige parfaitement hors-axe,  $\langle \phi_i^2 \rangle_{aniso}$  et  $\langle \phi_i \phi_k \rangle_{aniso}$  correspondent à de l'anisoplanétisme pur et sont obtenues en intégrant les formules données dans [Cha92] par une intégration de Romberg numérique.

Finalement, on obtient :

$$\sigma_{aa}^{aniso} = \sqrt{\left\langle \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 \right\rangle}. \quad (4.10)$$

L'écart-type des angles d'arrivée  $\sigma_{aa}^{aniso}$  ainsi obtenu doit être inférieur à  $2 \cdot \sigma_{aa}^{turb.pure}$ . En effet, la variance de la phase sur-axe corrigée de la phase hors-axe s'exprime

$$\langle (\phi_{0,i} - \phi_{\alpha,i})^2 \rangle = \langle \phi_{0,i}^2 \rangle + \langle \phi_{\alpha,i}^2 \rangle - 2 \langle \phi_{0,i} \phi_{\alpha,i} \rangle = 2 \langle \phi_{0,i}^2 \rangle - 2 \langle \phi_{0,i} \phi_{\alpha,i} \rangle. \quad (4.11)$$

Si  $\langle \phi_{0,i} \phi_{\alpha,i} \rangle = 0$  (turbulence totalement décorrélée entre les deux directions), alors  $\langle (\phi_{0,i} - \phi_{\alpha,i})^2 \rangle = 2 \langle \phi_{0,i}^2 \rangle$ . L'écart-type maximal des angles d'arrivée  $2\sigma_{aa}^{turb.pure}$  est donc la valeur obtenue dans le cas où la turbulence est totalement décorrélée entre la direction d'analyse et la direction de correction.

Pour une distance focale  $f$ , si on choisit d'estimer l'excursion maximale du centre de gravité de la tache par  $2 * 3\sigma_{aa}f$ , le rapport entre cette excursion et la taille de la tache de diffraction est :  $6\sigma_{aa}\frac{d}{\lambda}$ . Le paramètre  $d = D/8$  représente la taille d'une sous-pupille et  $\lambda$  la longueur d'onde. On obtient, pour  $\alpha = 2$  degrés,  $h = 1$  mm,  $D = 0,86$  mm et  $\frac{D}{r_0} = 5,5$ , dans le cas anisoplanétique  $6\sigma_{aa}^{aniso}\frac{d}{\lambda} \simeq 1,2$  et sur-axe  $6\sigma_{aa}^{turb.pure}\frac{d}{\lambda} \simeq 2$ .

Si on se place dans les conditions de Shannon (1 pixel tous les  $\frac{\lambda}{2d}$ ), la focale des microlentilles vaut  $f' = 22$  mm. En fait, en raison de contraintes liées à leur fabrication, nous allons utiliser des micro-lentilles de focale 17,5 mm. On peut montrer que l'échantillonnage à Shannon sur deux est suffisant pour une analyse de surface d'onde de type Shack-Hartmann. Pour  $f = 17,5$  mm, on est entre Shannon et Shannon sur deux et on obtient pour la turbulence pure,

$$\text{une excursion de la tache de } 6\sigma_{aa}.f = 0,84 \text{ mm} = 3,5 \text{ pix} \quad (4.12)$$

$$\text{une largeur de tache de diffraction de } \frac{\lambda.f}{d} = 0,36 \text{ mm} = 1,5 \text{ pix} \quad (4.13)$$

et pour le cas "anisoplanétique",

$$\text{une excursion de la tache de } 6\sigma_{aa}^{aniso}.f = 0,43 \text{ mm} = 1,8 \text{ pix} \quad (4.14)$$

$$\text{une largeur de tâche de diffraction de } \frac{\lambda.f}{d} = 0,36 \text{ mm} = 1,5 \text{ pix} \quad (4.15)$$

L'excursion à trois écart-type du bord de la tache focale est donc inférieure à 5 pixels, soit la moitié d'une sous-pupille. L'analyseur devrait donc toujours travailler dans son domaine de linéarité pour les conditions de turbulence correspondant à notre lame de phase.

Il faut noter que tous les calculs effectués ici sont basés sur un modèle idéal de SH, qui ignore le seuillage et le fenêtrage des imagerie avant calcul des barycentres.

#### 4.2.3.2 Modèle d'ASO

Le modèle d'ASO, c'est-à-dire la matrice **D** qui relie l'espace des phases avec l'espace des mesures peut être obtenu analytiquement en calculant les dérivées de chaque mode de description de la phase sous-pupille par sous-pupille. Il faut pour cela prendre en compte la géométrie exacte des sous-pupilles par rapport à la pupille globale. On présente en figure 4.6 une mesure de cette géométrie effectuée en défocalisant légèrement la caméra.



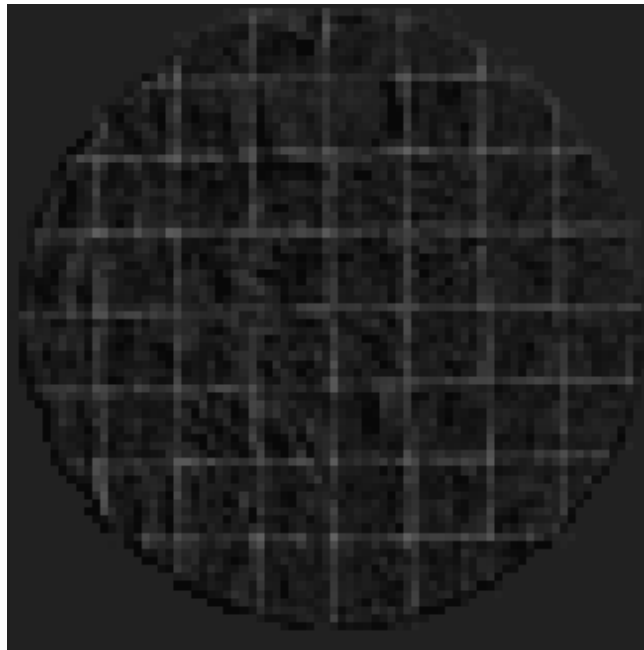


FIG. 4.6 – Géométrie de la pupille ASO

## 4.2.4 Le système de correction

### 4.2.4.1 Le modèle miroir

Le modèle du miroir, c'est-à-dire la matrice  $\mathbf{N}$ , a été obtenu en mesurant à l'aide d'un interféromètre Zygo la déformation du miroir provoquée par l'excitation de tous les actionneurs l'un après l'autre par une tension donnée. On a déjà présenté en paragraphe 1.2.1.1 la figure 4.7 qui représente la mesure ainsi effectuée sur le quarantième actionneur. On projette alors ce résultat sur les base des modes de description de la phase. Chaque colonne de  $\mathbf{N}$  correspond à la décomposition de la forme d'un actionneur sur cette base.

### 4.2.4.2 La dérive du miroir

Il faut noter ici que les actionneurs du miroir, s'ils sont excités avec une tension constante, dérivent. C'est-à-dire que la forme observée sur la figure 4.7 ne reste pas identique à elle-même, la hauteur de la déformation augmente avec le temps. Dans la phase statique de la manip, on pourra avoir envie de conserver une forme constante au miroir. Il faudra prendre en compte ce phénomène et s'assurer qu'il n'est pas limitant.

## 4.2.5 Injection des sources

L'injection des sources est faite au moyen de fibres optiques pour des raisons de commodités. Le dimensionnement des sources revient à déterminer le diamètre des fibres, le spectre de la source, le

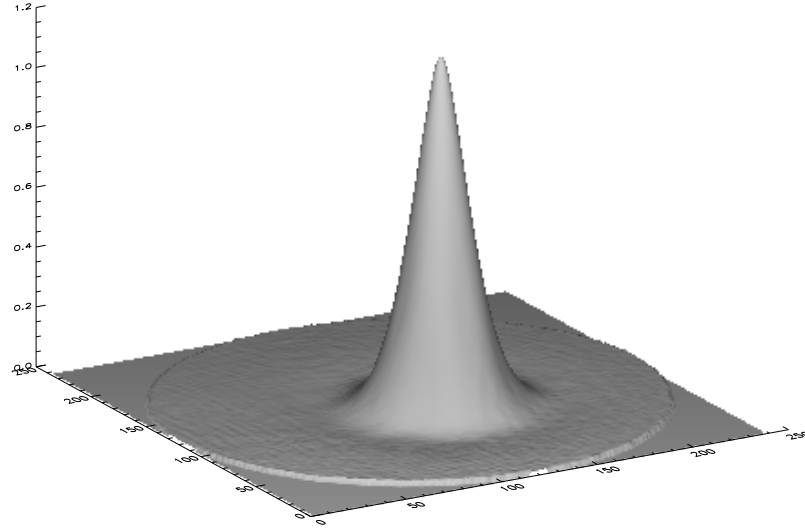


FIG. 4.7 – Déformée du moteur numéro 40 en microns mesurée sur la pupille totale du miroir déformable pour une application de tension de 3V.

flux et le temps de pose nécessaires.

Une étude d'optimisation du module d'injection ([Obe02]) a permis d'aboutir à la configuration présentée en figure 4.8 : deux fibres optiques non résolues sont disposées de part et d'autre d'une lame semi-transparente éclairée en faisceau collimaté. La voie d'injection a été conçue pour minimiser les aberrations statiques, aberrations de champ et aberrations chromatiques.

Pour modifier le recouvrement des deux pupilles dans les directions des deux sources sur la lame de phase, on joue, à champ fixe, sur la distance entre la pupille et l'écran par translation du système d'injection par rapport à la pupille du banc.

On a choisi de conserver une pupille fixe et de déplacer le module. Celui-ci comprend l'écran de phase, un doublet de lentilles et les sources fibrées. Cet ensemble est disposé sur une platine qui permet sa translation. Cela impose de positionner l'écran de phase à  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique du banc.

Le champ est de  $\alpha = 2^\circ$  dans cet espace. Pour diminuer la distance pupille-écran (et donc la scintillation),  $\alpha$  a été pris le plus grand possible tout en restant inférieur au champ limite du banc BOA. Si  $h$  est la distance entre la pupille de diamètre  $D$  et l'écran et si on souhaite un "découvrement" de faisceaux  $r_{pup}$ , on a :

$$h\alpha = Dr_{pup}. \quad (4.16)$$

Pour un facteur de "découvrement"  $r_{pup}$  compris entre 0 et 1, on obtient, avec  $D = 0,86$  mm et  $\alpha = 2$  degrés, la distance  $h$  correspondante :

$$h = \frac{D}{\alpha} r_{pup} \simeq 24,6 \, r_{pup} \quad \text{mm}. \quad (4.17)$$

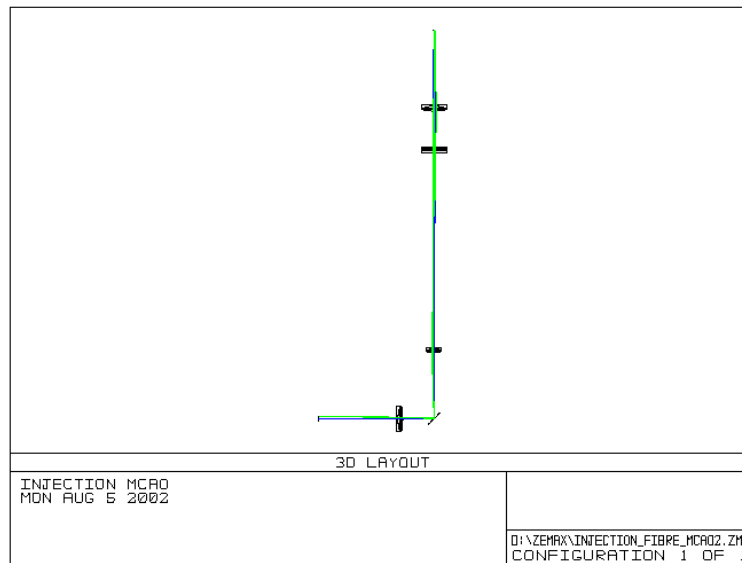


FIG. 4.8 – Module d’injection du banc conçu sous Zemax

Pour un recouvrement nul ( $r_{pup} = 1$ ) entre les deux faisceaux au niveau de l’écran de phase, on obtient qu’il faut éloigner l’image de la pupille de la lame de phase d’une distance de  $h = 24,6$  mm et de  $h = 2,46$  mm pour un recouvrement de 90% en diamètre ( $r_{pup} = 0,1$ ).

Il faut donc prévoir une dynamique de translation de l’ordre de 25 mm pour que l’on puisse faire varier le recouvrement pupillaire jusqu’à  $r_{pup} = 1$ .

### 4.3 La démarche expérimentale

On va décrire ici la démarche envisagée pour les manip statique et dynamique. Il s’agit dans les deux cas de valider les concepts proposés et testés en simulation numérique mais également de valider expérimentalement les modèles du système (ASO, miroir) ainsi que leurs procédures de calibration.

#### 4.3.1 La manip statique

On rappelle qu’un certain nombre de validations que l’on souhaite faire peuvent être effectuées sur un système statique, plus simple à mettre en place que le système dynamique. Il n’est entre autre pas nécessaire de reprogrammer la carte du calculateur temps réel, d’interfacer la nouvelle caméra avec le calculateur... Ces derniers points à finaliser avant la phase dynamique pourront être poursuivis en parallèle de la manip statique.

#### 4.3.1.1 Calcul de la matrice d'interaction optique et validation des modèles du système

Dans cette étape statique, on va commencer par vérifier que les caractérisations que l'on a obtenues expérimentalement du modèle miroir et du modèle ASO sont cohérentes avec la matrice d'interaction optique. En effet, on a théoriquement la relation suivante entre les trois matrices :

$$\mathbf{ND} = \mathbf{D}_{int}. \quad (4.18)$$

On a présenté aux paragraphes 4.2.3.2 et 4.2.4.1 les modèles qu'on a obtenu expérimentalement pour les matrices  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{D}$ . Il reste à obtenir une matrice d'interaction et à la comparer avec  $\mathbf{ND}$ . On rappelle que la matrice d'interaction est la matrice qui contient sur chaque colonne la réponse de l'ASO (pentes) à l'excitation d'un actionneur du miroir. Pour l'obtenir, on excite successivement tous les actionneurs du miroir et on mesure à chaque fois la réponse de l'ASO.

L'intérêt de cette première validation est double. Elle assure tout d'abord que l'on est capable de connaître les modèles d'ASO et de miroir avec une certaine précision, précision dont elle donne l'ordre de grandeur. Elle permet alors d'envisager le calcul de la matrice d'interaction à partir de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$ . Cette application peut en effet prendre de l'importance dans le cas d'un système OAMC, où la configuration des étoiles guides peut être différente à chaque observation... La mesure de la matrice d'interaction pour chaque configuration paraît impossible. La connaissance des modèles  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{D}$  permettrait de s'en affranchir.

Il pourra alors sembler naturel à ce stade-là de fermer la boucle en optimisant la correction sur l'étoile guide, comme en OA classique. Cela permettra de valider toutes les modifications apportées au banc BOA (nouvelle caméra, nouvel analyseur, nouvelle taille de pupille...).

#### 4.3.1.2 La correction hors-axe

La deuxième étape de la manip statique consiste à estimer la phase hors-axe à partir d'une mesure sur-axe et d'une connaissance *a priori* sur la statistique spatiale de la phase, puis à projeter l'estimée sur le MD pour correction.

L'optimisation hors-axe peut être menée par une approche d'estimation de la phase par MMSE (paragraphe 1.3.2) dont on a vu qu'elle est équivalente en statique au filtre de Kalman. L'estimée de la phase dans la couche peut alors s'écrire :

$$\hat{\varphi}^{tur} = \mathbf{C}_\phi \left( \mathbf{M}_\beta^L \right)^T \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_\beta^L \mathbf{C}_\phi \left( \mathbf{M}_\beta^L \right)^T \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w \right)^+ \mathbf{Y}, \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{Y}$  est la mesure sur-axe, non affectée par la correction du miroir. Ceci suppose, puisque notre montage est en boucle fermée, que l'on commence, avant toute acquisition, par mettre à plat le miroir.  $\mathbf{C}_\phi$  est la matrice de covariance de Noll, pondérée par le bon  $r_0$ ,  $\mathbf{C}_w$  la matrice de covariance du bruit et  $\mathbf{M}_\beta^L$  la matrice qui permet d'extraire la phase dans la direction de mesure  $\beta$  de l'écran de phase. Si la direction hors-axe dans laquelle on souhaite optimiser la correction est notée  $\alpha$ , alors, on obtient tout d'abord l'estimée de la phase hors-axe par :

$$\hat{\varphi}_\alpha^{tur} = \mathbf{M}_\alpha^L \hat{\varphi}^{tur} = \mathbf{M}_\alpha^L \mathbf{C}_\phi \left( \mathbf{M}_\beta^L \right)^T \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_\beta^L \mathbf{C}_\phi \left( \mathbf{M}_\beta^L \right)^T \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w \right)^+ \mathbf{Y} \quad (4.20)$$

qu'il reste finalement à projeter sur la base des actionneurs du miroir pour obtenir la meilleure correction dans la direction  $\alpha$  connaissant la mesure dans la direction  $\beta$ , soit :

$$\mathbf{u}_\alpha = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^+ \mathbf{N}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha^{tur} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^+ \mathbf{N}^T \mathbf{M}_\alpha^L \mathbf{C}_\phi (\mathbf{M}_\beta^L)^T \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_\beta^L \mathbf{C}_\phi (\mathbf{M}_\beta^L)^T \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_w \right)^+ \mathbf{Y}. \quad (4.21)$$

Les matrices  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{C}_\phi$  utilisées expérimentalement seront celles obtenues suite aux calibrations (paragraphe 4.2.2). La performance du système sera estimée à partir de l'image obtenue. On pourra moyenner l'image obtenue sur plusieurs zones de l'écran de phase pour simuler une mesure longue pose. L'énergie cohérente ou le rapport de Strehl sur-axe et hors-axe pourront être utilisés pour quantifier cette performance.

La différence entre la performance du système obtenue par simulation et celle que l'on obtiendra expérimentalement sera entre autre due aux erreurs de calibration (erreurs de mesures des fonctions d'influence du miroir, incertitude sur la caractérisation de l'analyseur, sur la mesure de  $r_0$ ) qui proviennent du bruit de mesure ou d'approximations (par exemple approximation de linéarité du comportement du miroir et de l'analyseur).

Une fois cette manip faite, on aura quantifié l'impact sur la performance du système des incertitudes sur notre connaissance des "paramètres statiques",  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $r_0$ .

### 4.3.2 La manip dynamique

Dans la deuxième étape de la validation expérimentale, l'écran de phase sera monté sur un moteur à vitesse variable.

La boucle sera fermée suivant l'approche proposée dans le chapitre 3. A chaque instant, la phase turbulente dans la couche sera estimée par filtrage de Kalman puis découpée dans la direction d'intérêt et projetée sur les actionneurs du miroir, comme dans la phase statique :

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^+ \mathbf{N}^T \mathbf{M}_\alpha^L \hat{\boldsymbol{\varphi}}_n^{tur}. \quad (4.22)$$

Il faut remarquer que dans cette configuration, à chaque instant, la mesure de l'analyseur qui se fait sur-axe est loin de la mesure nulle. L'analyseur voit la phase sur-axe "mal corrigée" par le miroir optimisé pour la correction hors-axe. C'est en cela qu'il est important de bien connaître le modèle de l'analyseur. Il ne fonctionne en effet pas autour de zéro, comme en OA classique. Il y a alors des risques de sortie de la zone de linéarité de l'ASO. C'est une raison pour laquelle la phase statique est nécessaire avant de fermer la boucle en correction hors-axe, afin de valider notre connaissance de  $\mathbf{D}$  et du comportement de l'analyseur dans des conditions différentes de l'OA classique.

En pratique, pour implémenter le filtre de Kalman, il faut choisir un modèle d'évolution de la phase adapté, c'est-à-dire choisir  $\mathbf{A}_{tur}$ . On peut imaginer une procédure de calibration de la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  dans le cas d'un modèle AR1, ce qui correspond au modèle que l'on propose dans les précédents chapitres de ce mémoire.

Chaque coefficient de la diagonale de  $\mathbf{A}_{tur}$  est directement relié à la décorrélation du mode correspondant. On propose d'effectuer une série temporelle de mesures boucle ouverte, que l'on décompose sur la base de modes choisie pour représenter la phase. A partir de cette série temporelle, on calcule

la décorrélation temporelle mode à mode de la turbulence. La décorrélation du modèle AR1, de décroissance exponentielle, peut alors être ajustée en jouant sur les coefficients de la diagonale de  $\mathbf{A}_{tur}$ . La question de savoir de quelle manière l'ajustement doit être fait reste une question ouverte. Il n'est en effet pas trivial d'ajuster une exponentielle sur une gaussienne et nous n'avons pas prétendu dans ce mémoire traiter cette question. Il nous semble *a priori* qu'un ajustement tel que la décorrélation de l'AR1 à  $2T$  soit égale à la décorrélation mesurée à  $2T$  sur chaque mode serait judicieux. Il optimiserait en effet la prédiction. Cette question nécessitera sans doute une étude, si ce n'est d'essayer différents ajustements possibles pour comparer les performances.

Il peut être de plus intéressant de remplir toute la matrice  $\mathbf{A}_{tur}$  et pas seulement la diagonale avec la même démarche expérimentale. On peut en effet à partir des mesures HASO calculer la décorrélation croisée entre deux modes et ajuster les décorrélations croisées du modèle AR1.

Dans tous les cas, il est clair que le modèle d'évolution de la turbulence utilisé dans le filtrage de Kalman est une approximation du comportement réel de la phase turbulente. Si la perte de performance induite par cette approximation peut être estimée en simulation numérique, la mise en œuvre expérimentale devrait permettre de valider la procédure de calibration de  $\mathbf{A}_{tur}$  proposée ici. On vérifiera notamment que l'erreur de calibration introduite par le bruit sur les mesures boucle ouverte ne limite pas les performances du système.

De plus, la mise en œuvre effective d'un filtre de Kalman dans un système réel permettra de vérifier si l'approche que l'on propose donne sur un système des résultats semblables à ceux qu'on a obtenus en simulation avec des modèles simples d'analyseur, de miroir, etc... L'adaptabilité de notre approche, que l'on a déjà commentée au chapitre 2, devrait également permettre de prendre en compte à peu de frais des phénomènes physiques inattendus qui pourraient apparaître.

Dans un premier temps, on pourra traiter le système dynamique en "pas à pas". Cela signifie que l'on fera tourner l'écran de phase d'un angle fini, puis on procédera à l'analyse sur-axe, on estimera la phase hors-axe, on fera à nouveau tourner l'écran du même angle fini, pour tenir compte du retard dans la boucle fermée, puis on appliquera les nouvelles tensions et on fera une nouvelle acquisition de mesures de l'ASO... On s'affranchira ainsi tout d'abord de la dimension "temps réel" du système. La commande à temps réel passe par la fabrication d'une carte de calcul. Dans cette étape finale, la mesure correspondra, conformément aux hypothèses faites pour mettre en place le modèle d'état dans le paragraphe 2.2.1, à l'intégrale de la phase turbulente sur un intervalle de temps.

#### 4.3.2.1 Considérations pratiques sur la mise en place d'un filtre de Kalman suivi d'un retour d'état

On va terminer ce chapitre consacré à la préparation d'une mise en œuvre expérimentale par quelques considérations sur les tailles des matrices et le nombre d'opérations nécessaires pour implémenter le filtre et la commande proposée dans ce mémoire.

Habituellement, l'asservissement des systèmes d'OA est géré par un intégrateur. Alors, à chaque itération, les nouvelles commandes sont obtenues comme

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{M}_{com} \mathbf{Y}_{n+1}, \quad (4.23)$$

avec  $\mathbf{M}_{com}$  la matrice de commande et  $\mathbf{Y}$  les mesures. Si on note  $n_{act}$  le nombre d'actionneurs et  $n_{mes}$  le nombre d'éléments de  $\mathbf{Y}$ , alors  $\mathbf{M}_{com}$  est de taille  $n_{act} \times n_{mes}$ . A chaque itération, on n'enregistre

que  $\mathbf{u}_n$ .

Dans l'approche que l'on propose, les opérations à effectuer à chaque itération peuvent s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{n+2/n} \\ \hat{\varphi}_{n+1/n} \\ \hat{\varphi}_{n/n} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{n+1/n-1} \\ \hat{\varphi}_{n/n-1} \\ \hat{\varphi}_{n-1/n-1} \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2(\mathbf{Y}_n - \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{u}_{n-2}), \quad (4.24)$$

suivie de la projection sur le miroir :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}_4 \hat{\varphi}_{n+1/n}. \quad (4.25)$$

Si on décrit la phase en utilisant  $n_{mod}$  modes ( $\varphi_n$  est de taille  $n_{mod}$ ), alors  $\mathbf{M}_1$  est de taille  $3n_{mod} \times 3n_{mod}$ ,  $\mathbf{M}_2$  est de taille  $3n_{mod} \times n_{mes}$ ,  $\mathbf{M}_3$  est de taille  $n_{mes} \times n_{act}$  et  $\mathbf{M}_4$  est de taille  $n_{act} \times n_{mod}$ .

L'approche que l'on propose nécessite donc de garder en mémoire un peu plus de paramètres que l'approche intégrateur et de faire un peu plus d'opérations par itération. Il est néanmoins possible, en utilisant les propriétés des matrices creuses, de diminuer les tailles des matrices et les temps de calculs. Cela pourrait faire l'objet d'études ultérieures si le besoin d'accélérer les calculs se fait sentir.

## 4.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre la mise en place d'un système expérimental permettant de valider la notion de correction hors-axe et l'utilisation d'*a priori* pour l'estimation de la phase turbulente. Nous avons présenté les objectifs d'une approche expérimentale et nous nous sommes attachés dans tout le chapitre à préciser ses avantages vis-à-vis d'une démarche de simulations numériques. Il est apparu qu'un certain nombre de procédures expérimentales doivent être validées de même que les hypothèses simplificatrices que l'on fait pour les éléments du système (linéarité de l'ASO, du miroir...). Après les objectifs de l'approche expérimentale, nous avons présenté les différents éléments du banc optique au paragraphe 4.2 puis nous avons détaillé la procédure envisagée avant de terminer le chapitre sur des considérations touchant à la taille des matrices et au temps de calcul.

La mise en œuvre expérimentale est en cours à l'Onera. Elle devrait donner ses premiers résultats exploitables à l'automne 2003 et devrait permettre d'ici la fin de l'année 2004 de valider l'utilisation du filtrage de Kalman et du retour d'état que l'on propose dans ce mémoire pour la commande d'un système dynamique.

# Conclusion

## Bilan

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire avait pour objectif de développer une commande optimale au sens de la variance de phase minimale pour l'optique adaptative multiconjuguée (OAMC) et qui utilise autant les connaissances *a priori* spatiales que temporelles dans la gestion du système boucle fermée. Pour ce faire, nous avons proposé l'utilisation d'un formalisme classique en automatique, le formalisme d'état. Dans ce formalisme, le traitement d'un problème d'estimation et de commande comme celui qui se posait passe par l'écriture d'un modèle d'état, qui décrit l'évolution du système par l'intermédiaire d'une variable représentant l'état du système et qu'on nomme vecteur d'état.

Nous avons établi dans ce formalisme le modèle d'état à temps discret qui permet de décrire un système d'OA classique. La description de l'évolution temporelle de la phase turbulente est faite par un modèle auto-régressif du premier ordre. Le retard entre la mesure et l'application des commandes est traité en l'introduisant dans le modèle. La dynamique du miroir a été négligée, ce qui permet de simplifier la commande en une commande à réponse pile. Le problème se ramène alors à un problème d'estimation de la phase turbulente. Nous avons présenté, pour faire cette estimation, la théorie du filtrage de Kalman et le filtre de Kalman adapté au modèle choisi. Il utilise les connaissances *a priori* spatiales et temporelles dont on dispose.

Nous avons situé analytiquement les approches antérieures et sous-optimales d'estimation et commande en OA par rapport à l'approche que nous proposons. Nous avons également expliqué que le formalisme d'état apporte une grande souplesse dans le traitement de l'asservissement. La prise en compte explicite sous la forme du modèle d'état de l'évolution physique du système permet en effet de tenir compte facilement de paramètres en les introduisant dans l'équation d'évolution du système ou dans l'équation de mesure, à partir desquels on définit le filtre de Kalman approprié. Nous avons enfin présenté les performances de notre estimateur obtenues par simulations numériques et nous les avons comparées à une autre approche, l'intégrateur à gain modal optimisé. Nous avons montré que le filtrage de Kalman apporte un gain substantiel en OA classique.

Après avoir étudié l'OA classique, la question de la commande optimale en OAMC a été abordée. Dans le cas statique boucle ouverte tout d'abord, nous avons mené une étude de la robustesse des performances de l'estimateur optimal vis-à-vis des variations de conditions de turbulence relatives au profil de  $C_n^2$ . Nous avons également traité dans ce même cas la question de la robustesse des performances de l'estimateur optimal vis-à-vis de notre méconnaissance du profil de  $C_n^2$ . Nous avons montré que la connaissance exacte du profil de turbulence n'est pas un paramètre critique dans l'es-



timisation de la phase mais que les conditions de turbulence elles-mêmes (et notamment la présence de turbulence en altitude) influent sur les performances de façon prépondérante dans les conditions de simulation considérées. Cela signifie que le choix de sites favorable à l'OAMC doit être fait en fonction de la répartition en altitude de la turbulence et donc à partir de mesures de profils de  $C_n^2$  et confirme donc l'intérêt de ce genre de mesures. Enfin, nous avons présenté, en nous appuyant sur un article soumis à JOSAA, l'application de l'approche par modélisation d'état au cas de l'Optique Adaptative Multiconjuguée. Cette approche permet d'obtenir des performances dans le champ significativement meilleures que celle que l'on obtient avec l'intégrateur à gain modal optimisé, dont nous avons proposé et présenté une version adaptée à l'OAMC. La prise en compte des *a priori* spatiaux (sur le bruit de mesure et la phase turbulente) permet en effet d'estimer partiellement et de corriger les modes mal-vus qui sont filtrés dans l'approche IGMO et donc de diminuer l'anisoplanétisme résiduel. Le gain constaté en OA classique, lié notamment à la prédiction qui compense les trames de retard entre mesure et application de la commande, se retrouve dans le cas Multiconjugué comme un gain sur axe (sur les étoiles guides).

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté la préparation de la mise en œuvre expérimentale de nos travaux théoriques sur le banc d'Optique Adaptative BOA de l'ONERA [Obe02]. Il s'agit de valider la correction hors-axe par l'utilisation d'*a priori* spatiaux, dans le cas statique puis dynamique. Un filtre de Kalman sera utilisé dans le cas dynamique pour estimer la phase hors-axe. Nous avons présenté les objectifs, le dimensionnement du système et les calibrations effectuées.

## Perspectives

Les résultats obtenus au cours de ces travaux de thèse et présentés dans ce mémoire n'ont pas pour prétention de clore le débat et le sujet mais ouvrent au contraire de nouvelles perspectives et doivent entraîner de nouveaux travaux.

Au delà de la poursuite des travaux théoriques entamés à l'occasion de cette thèse, il faut appliquer l'approche proposée dans ce mémoire et valider expérimentalement les résultats obtenus. Le projet de mise en œuvre expérimentale en cours à l'ONERA sur le banc d'optique adaptative BOA devrait permettre d'y parvenir. Le système est dimensionné et l'assemblage des éléments optiques est quasiment terminé. De premiers résultats seront obtenus cet automne.

Une étude de la robustesse des performances du filtre de Kalman d'un point de vue analytique et à partir de simulations numériques permettrait de vérifier si, comme on s'y attend, les résultats obtenus dans le cas OAMC statique boucle ouverte et présentés dans ce mémoire sont généralisables au cas dynamique boucle fermée. Si c'est le cas, cela signifiera tout d'abord que la connaissance très précise des statistiques de la turbulence et du  $C_n^2$  n'est pas nécessaire et qu'un réajustement régulier peut suffire. Il faudra également étudier la robustesse des performances du filtre de Kalman vis-à-vis d'erreurs de modélisation du système d'OA, comme le modèle de miroir déformable ou le modèle de l'analyseur. L'effet d'éventuelles non-linéarités de l'analyseur sur les performances pourront par exemple être étudiées avec profit.

On pourra dans un second temps affiner le modèle d'état en y introduisant des paramètres comme l'effet d'*aliasing* spatial sur les mesures de front d'onde ou les vibrations du télescope ou tout comportement imprévu du système qui ne manqueront pas d'apparaître lors de la mise en œuvre expé-

rimentale... Cette démarche permettrait de corriger au moins en partie ces phénomènes, améliorant ainsi d'autant les performances du système.

Il serait également intéressant de quantifier le gain qu'apporterait un filtre de Kalman basé sur un modèle d'évolution de la turbulence d'ordre plus élevé que celui que nous utilisons, un modèle autorégressif d'ordre deux ou trois. La question de l'ajustement au mieux du modèle auto-régressif sur un modèle d'évolution de type Taylor pourrait alors être traitée de façon pertinente.

A plus long terme, la démarche présentée dans ce mémoire - un formalisme d'état et un filtrage de Kalman - pour estimer la phase turbulente pourra être avantageusement mise en pratique dans au moins deux champs d'application : l'Optique Adaptative Haut Strehl et l'OAMC.

L'OA Haut Strehl (Extreme AO ou XAO) s'insère dans une démarche de détection d'exoplanètes depuis le sol [MLB<sup>+</sup>02]. On peut par coronagraphie éteindre une étoile pour laisser apparaître la planète qui gravite autour. Cela nécessite une grande efficacité du coronographe, ce qui signifie que le front d'onde qui lui arrive dessus doit être de variance spatiale la plus faible possible.

Il s'agit d'utiliser pour cela une Optique Adaptative Classique optimisée le plus possible, c'est-à-dire dans laquelle on a minimisé tous les termes d'erreur. L'étoile de référence sera pour ce genre de systèmes relativement brillante, afin de limiter le bruit de photons. Cela signifie donc qu'il faudra, pour rester limité par ce bruit de photon et équilibrer le budget d'erreur, être beaucoup plus exigeant sur toutes les autres sources d'erreur et notamment prendre en compte le retard entre mesure et commande pour limiter l'erreur temporelle mais aussi l'*aliasing*, la scintillation... Le filtrage de Kalman tel qu'on le propose permet de prendre en compte tous ces facteurs de manière optimale vis-à-vis du critère de variance résiduelle minimale.

Pour ce qui concerne l'OAMC, plusieurs projets actuels envisagent d'ores et déjà sa mise en œuvre sur des télescopes de 8 m ou plus. On peut citer les projets MAD [HMF<sup>+</sup>01] et GEMINI [RCED00]. A terme, pour optimiser de tels systèmes, il faudra utiliser une commande optimale du type de celle que l'on propose dans ce mémoire, de même que pour les très grands télescopes (depuis les télescopes de 20 m jusqu'au télescope OWL de 100 m de l'ESO) à l'étude actuellement, notamment dans le cadre d'un réseau européen d'échange initié par l'ESO.



# Annexe A

## Notions de dérivation matricielle

On définit la dérivée d'une quantité matricielle  $\mathbf{A}$  par rapport à la variable matricielle  $\mathbf{B}$  par la matrice notée  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}$  définie comme

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial B_{11}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial B_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial B_{m1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial B_{mn}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

On peut tout d'abord noter que

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}^T} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{B}} \right)^T \quad (\text{A.2})$$

On peut ensuite montrer que la dérivée matricielle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{BA})}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{A}^T \\ \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{B}^T \mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{BA}^T)}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B} \\ \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{ABCB})}{\partial \mathbf{B}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \frac{\partial \text{Trace}(\mathbf{ABCB}^T)}{\partial \mathbf{B}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{BC}^T + \mathbf{ABC}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont des matrices réelles quelconques.



## Annexe B

# Compléments de calcul sur l'interprétation du prédicteur modal en tant qu'observateur sous-optimal

On va montrer ici que le prédicteur modal de C. Dessenne qui s'écrit (voir le paragraphe (2.6) )

$$\hat{\phi}_{n+1}^{tur} + \Upsilon_1 \hat{\phi}_n^{tur} + \Upsilon_2 \hat{\phi}_{n-1}^{tur} + \Upsilon_3 \hat{\phi}_{n-2}^{tur} = \Upsilon_4 \phi_n^{res,mes} + \Upsilon_5 \phi_{n-1}^{res,mes} + \Upsilon_6 \phi_{n-2}^{res,mes}, \quad (\text{B.1})$$

peut être vu comme un observateur de forme générale

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{X}}_n + \mathbf{L}(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n), \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\hat{\phi}_n^{tur} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{n,1}^{tur} \\ \hat{\phi}_{n,2}^{tur} \\ \hat{\phi}_{n,3}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{pmatrix}.$$

Cet observateur est adapté au modèle d'état

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_n + \Gamma_{pred} \mathbf{V}_n, \\ \mathbf{Y}_n &= \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_n + \mathbf{A}_3 \mathbf{W}_n, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\Upsilon_1 & -\Upsilon_2 & -\Upsilon_3 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{Id} \end{pmatrix}.$$

Pour arriver à ce résultat, il faut poser

$$\hat{\mathbf{Y}}_n = \hat{\phi}_{n,3}. \quad (\text{B.6})$$

Alors on peut écrire

$$\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \phi_{n-1}^{tur} + \mathbf{D}^+ \mathbf{W}_n - \hat{\phi}_{n-1}^{tur} = \phi_n^{mes}. \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.2) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{n+1,1} &= -\Upsilon_1 \hat{\phi}_{n,1} - \Upsilon_2 \hat{\phi}_{n,2} - \Upsilon_3 \hat{\phi}_{n,3}, \\ \hat{\phi}_{n+1,2} &= \hat{\phi}_{n,1} + \mathbf{L}_2 \phi_n^{mes}, \\ \hat{\phi}_{n+1,3} &= \hat{\phi}_{n,2} + \mathbf{L}_3 \phi_n^{mes}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Alors, avec l'équation (B.6), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{n,2} &= \hat{\phi}_{n+1,3} - \mathbf{L}_3 \phi_n^{mes} = \hat{\phi}_n^{tur} - \mathbf{L}_3 \phi_n^{mes}, \\ \hat{\phi}_{n,1} &= \hat{\phi}_{n+1,2} - \mathbf{L}_2 \phi_n^{mes} = \hat{\phi}_{n+1}^{tur} - \mathbf{L}_3 \phi_{n+1}^{mes} - \mathbf{L}_2 \phi_n^{mes}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En reportant maintenant dans l'équation (B.8) et en regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{n+2}^{tur} + \Upsilon_1 \hat{\phi}_{n+1}^{tur} + \Upsilon_2 \hat{\phi}_n^{tur} + \Upsilon_3 \hat{\phi}_{n-1}^{tur} = \\ \mathbf{L}_3 \phi_{n+2}^{mes} + (\mathbf{L}_2 + \Upsilon_1 \mathbf{L}_3) \phi_{n+1}^{mes} \\ (\mathbf{L}_1 + \Upsilon_1 \mathbf{L}_2 + \Upsilon_2 \mathbf{L}_3) \phi_n^{mes}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

qui peut aussi s'écrire deux instants plus tôt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n^{tur} + \Upsilon_1 \hat{\phi}_{n-1}^{tur} + \Upsilon_2 \hat{\phi}_{n-2}^{tur} + \Upsilon_3 \hat{\phi}_{n-3}^{tur} = \\ \mathbf{L}_3 \phi_n^{mes} + (\mathbf{L}_2 + \Upsilon_1 \mathbf{L}_3) \phi_{n-1}^{mes} \\ (\mathbf{L}_1 + \Upsilon_1 \mathbf{L}_2 + \Upsilon_2 \mathbf{L}_3) \phi_{n-2}^{mes}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

ce qui correspond bien à (B.1) si on choisit la matrice  $\mathbf{L}$  comme :

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Upsilon_6 - \Upsilon_1 - \Upsilon_4(\Upsilon_2 - \Upsilon_1^2)\Upsilon_4 \\ \Upsilon_5 - \Upsilon_1 \Upsilon_4 \\ \Upsilon_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

## Annexe C

### De l'origine de la perte d'observabilité dans le modèle d'état choisi

Nous allons ici détailler l'origine de la perte d'observabilité constatée au paragraphe 2.4.3 et concernant le modèle d'état que nous avons choisi.

Cette perte d'observabilité provient de la non-minimalité du modèle, qui trouve elle-même son origine dans le choix de faire intervenir dans le modèle d'état les phases turbulentes et les commandes à différents instants au lieu de la phase résiduelle. Ce choix avait été fait pour pouvoir généraliser facilement le modèle obtenu au cas multiconjugué.

On va introduire un changement de base dans l'espace d'état qui permettra de faire apparaître les composantes non observables. Pour cela, on introduit le changement de coordonnées qui fait passer de

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n,1} \\ \mathbf{X}_{n,2} \\ \mathbf{X}_{n,3} \\ \mathbf{X}_{n,4} \\ \mathbf{X}_{n,5} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

à

$$\boldsymbol{\mu}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{n,1} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,2} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,3} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,4} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n,1} \\ \mathbf{X}_{n,2} - \mathbf{N}\mathbf{X}_{n,4} \\ \mathbf{X}_{n,3} - \mathbf{N}\mathbf{X}_{n,5} \\ \mathbf{X}_{n,2} + \mathbf{N}\mathbf{X}_{n,4} \\ \mathbf{X}_{n,3} + \mathbf{N}\mathbf{X}_{n,5} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$



On peut inversement passer de  $\mathbf{X}$  à  $\boldsymbol{\mu}$  avec

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{n,2} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n,2} + \boldsymbol{\mu}_{n,4}), \\ \mathbf{X}_{n,3} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n,3} + \boldsymbol{\mu}_{n,5}), \\ \mathbf{X}_{n,4} &= \frac{1}{2}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\mu}_{n,4} - \boldsymbol{\mu}_{n,2}), \\ \mathbf{X}_{n,5} &= \frac{1}{2}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\mu}_{n,5} - \boldsymbol{\mu}_{n,3}).\end{aligned}\tag{C.3}$$

Le modèle d'état s'écrit avec le vecteur  $\boldsymbol{\mu}_n$  comme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{A}}_1 \boldsymbol{\mu}_n + \tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{u}_n + \mathbf{V}_n, \\ \mathbf{Y}_n &= \tilde{\mathbf{A}}_3 \boldsymbol{\mu}_n + \mathbf{W}_n,\end{aligned}\tag{C.4}$$

où les matrices  $\tilde{\mathbf{A}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_3$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{N} \\ 0 \\ \mathbf{N} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_3 &= (0 \ 0 \ \mathbf{Id} \ 0 \ 0).\end{aligned}\tag{C.5}$$

Alors, si on sépare  $\boldsymbol{\mu}$  en  $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{res} \\ \phi_{n-1}^{res} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{n,1} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,2} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,3} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\mu}_n^{(2)} &= \begin{pmatrix} \phi_n^{tur} + \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-1} \\ \phi_{n-1}^{tur} + \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{n,4} \\ \boldsymbol{\mu}_{n,5} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{C.6}$$

On peut alors montrer que les équations d'état du système dans la nouvelle base peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{n+1}^{(1)} &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{(11)} \boldsymbol{\mu}_n^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}_2^{(1)} \mathbf{u}_n + \mathbf{V}_n, \\ \boldsymbol{\mu}_{n+1}^{(2)} &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{(21)} \boldsymbol{\mu}_n^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}_1^{(22)} \boldsymbol{\mu}_n^{(2)} + \tilde{\mathbf{A}}_2^{(2)} \mathbf{u}_n, \\ \mathbf{Y}_n &= \tilde{\mathbf{A}}_3^{(1)} \boldsymbol{\mu}_n^{(1)} + \mathbf{W}_n,\end{aligned}\tag{C.7}$$

où  $\tilde{\mathbf{A}}_1^{(11)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_1^{(22)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_1^{(21)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_2^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_2^{(2)}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_3^{(1)}$  sont des matrices. Cette formulation montre que  $\mathbf{Y}_n$  ne dépend pas de  $\boldsymbol{\mu}_n^{(1)}$ , ce qui signifie que  $\boldsymbol{\mu}_n^{(1)}$  ne peut pas être observé à partir de  $\mathbf{Y}_n$ .



## **Annexe D**

### **Article de conférence ESO, Mai 2001**

# MultiConjugate Adaptive Optics: performance with optimal wavefront reconstruction

Venice 2001  
Beyond  
Conventional  
Adaptive  
Optics



Jean-Marc Conan, Brice Le Roux, Dolores Bello, Thierry Fusco, Gérard Rousset  
ONERA, Département d'Optique Théorique et Appliquée, B.P. 72, 93322 Châtillon Cedex, France

## ABSTRACT

An optimal phase reconstruction is proposed for large field of view high resolution imaging with multi-conjugate adaptive optics. This approach accounts for wavefront sensing noise but also makes use of a turbulence profile model. The choice of the number of DMs is discussed and illustrated on a 8 m telescope case. The performance is shown to be sensitive to the turbulence distribution in altitude. The reconstruction does not however require a very precise turbulence model.

## 1. INTRODUCTION

High resolution imaging with ground-based telescopes is now possible with adaptive optics [AO]. The corrected field of view [FOV] obtained with classical AO, using a single deformable mirror [DM] in the pupil, is however limited. Large field of view correction can be obtained by correcting the turbulence volume above the telescope. This corresponds to the concept of multi-conjugate adaptive optics [MCAO] which uses several DMs optically conjugated at various altitudes and several guide stars [GSs] for wavefront sensing. The concept of MCAO has been first proposed by Dicke [Dicke-a-75], the subject made a short come-back in the early 90s with papers from Beckers [Beckers-p-88], Tallon [Tallon-p-92] and Ellerbroek [Ellerbroek-a-94], among others, but people were still very busy with the implementation of classical AO systems. Now that these systems are mature, high angular resolution teams prepare future instruments, hence a very impressive number of MCAO papers in the last two years which all show the high potentiality of this technique [Fusco-a-99b, Fusco-a-01, Lelouarn-t-00, Ragazzoni-a-99a, Ragazzoni-a-99b, Rigaut-p-00, Tokovinin-a-00].

One key issue in such a system is the estimation of the correction phases from the wavefront sensing data. We recently proposed an optimal reconstruction approach [Fusco-a-01] which is briefly recalled here in Sect. 2. It ensures a minimum residual phase variance over a given FOV of interest which means an optimal image quality in this field. Note that we do not consider here any temporal behavior or close loop considerations.

The goal of this paper is to study the impact on the performance of various factors, when applying our optimal reconstruction approach, namely: the number of DMs, the  $C_n^2$  profile conditions during the observation and the uncertainties on this profile in the reconstruction. This study is illustrated by a realistic 8 m telescope near infrared observation case obtained by numerical simulation and presented in Sect. 3. In these simulations we use experimental  $C_n^2$  profiles obtained at San Pedro Martir (Mexico) by Remy Avila [Avila-a-01, Avila-a-98] using a generalized scidar [Fuchs-a-98]. Finally, in Sect. 4 we give a more general discussion and we try to outline some general trends concerning these limitations.

## 2. OPTIMAL RECONSTRUCTION

The goal of MCAO is to provide a good correction in a specified FOV of interest  $\{\alpha\}_{fov}$  which can be larger than the classical isoplanatic patch. The optimization of the correction on this field is presented here.

Let us assume that the turbulent atmosphere is composed of a discrete set of thin turbulent layers located at different heights. In the near field approximation, the resulting turbulent phase  $\Phi(\mathbf{r}, \alpha)$  for a sky direction  $\alpha$  is given, in the telescope pupil, by the sum along the beam of the phase in the different layers. This reads:

$$\Phi(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1)$$

---

Further author information: (Send correspondence to J.-M. Conan at conan@onera.fr)

where  $\mathbf{r}$  is the pupil coordinate,  $\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)$  the phase perturbation in the  $j^{th}$  atmospheric turbulent layer located at the altitude  $h_j$ .  $N_t$  is the number of turbulent layers.

In this paper we consider a system with one wavefront sensor [WFS] per GS. These WFSs therefore measure the resulting turbulent phase of Eq. 1 for the discrete set of GS directions  $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{gs}$ :

$$\Phi^m(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_i) = \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (2)$$

where  $\boldsymbol{\alpha}_i$  is the angular position of the  $i^{th}$  GS, and  $n_i$  corresponds to the measurement noise. For the sake of simplicity, Eq. 2 assumes that the WFSs directly give phase map measurements.

The reconstruction consists in estimating the correction phases  $\{\varphi_{corr,k}\}$  from all these measurements  $\{\Phi^m(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_i)\}_{gs}$  considering  $N_{DM}$  DM's located at different heights  $h_k$  ( $k \in [1, N_{DM}]$ ). Note that the resulting correction phase  $\Phi_{corr}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$  in a given direction  $\boldsymbol{\alpha}$  can be deduced from the DM correction phases  $\{\varphi_{corr,k}\}$  by a summation over DM layers similar to Eq. 1:

$$\Phi_{corr}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=1}^{N_{DM}} \varphi_{corr,k}(\mathbf{r} + h_k \boldsymbol{\alpha}) \quad (3)$$

We call here “optimal reconstruction” a reconstruction that ensures a minimum mean residual variance in the FOV of interest, that is the best image quality on this field of view. The criterion to be minimized therefore reads:

$$\epsilon = \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}} \left\langle \left\| \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) - \Phi_{corr}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) \right\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise} d\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

where  $\|\cdot\|^2$  denotes the spatial variance in the telescope pupil.  $\Phi_{corr}$  is deduced through Eq. 3 from the correction phases which are assumed to be some function of the WFS data. We therefore look for such a function so as to minimize the criterion, in average over turbulence and noise outcomes as stated by the notation:  $\langle \cdot \rangle_{\varphi, noise}$ . This implies some statistical knowledge on noise and turbulence.

As shown in[Fusco-a-01], when assuming Gaussian statistics for noise and turbulence, the minimization of this criterion leads to a solution in  $\{\varphi_{corr,k}\}$  which is linear with respect to the wavefront measurements. The solution can be written in this simple form:

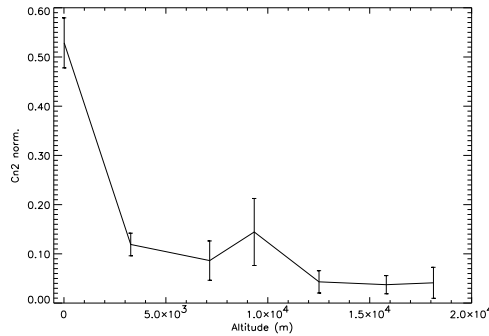
$$\{\varphi_{corr,k}\} = \mathbf{P}_{[\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}, DM]} \cdot \mathbf{W}_{tomo} \cdot \{\Phi_{gs}^m\} \quad (5)$$

$\mathbf{P}_{[\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}, DM]}$  and  $\mathbf{W}_{tomo}$  are two matrices. Their exact expressions are given in [Fusco-a-01] and we concentrate here on the physical interpretation of this equation. The optimal reconstruction can be seen as a two step process.

The first step corresponding to  $\mathbf{W}_{tomo}$  gives an optimal estimation of the turbulent phases  $\{\varphi_j\}$  on each layer. This reconstruction is often called tomographic since it gives a reconstruction of the turbulent volume from the projections given by the WFSs. It accounts for the GS geometry, for the WFS measurement model and for noise and turbulence statistics. Both noise and turbulence are characterized by their covariance matrix. Concerning turbulence we assume independent layers with Kolmogorov statistics and we use a  $C_n^2$  profile. Note that  $\mathbf{W}_{tomo}$  is not related to the DMs and is independent of the FOV of interest.

The second step corresponding to  $\mathbf{P}_{[\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}, DM]}$  consists in a projection of the tomographic solution onto the DMs to obtain the correction phases  $\{\varphi_{corr,k}\}$  that will optimize the correction in the desired FOV. It is a geometrical operation which gives the correction phases from the phase in the volume, it only depends on the number and position of the DMs with respect to the true layers, and on the FOV of interest. Here we project our best estimate of the phase in the volume  $\mathbf{W}_{tomo} \cdot \{\Phi_{gs}^m\}$ , but the same projection would be applied to the true phase if it was known.

Of course when the number and position of the DMs exactly match the turbulent layers,  $\mathbf{P}_{[\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}, DM]}$  becomes identity and the correction phases are directly given by the tomographic reconstruction. In this ideal case the solution is independent of the FOV of interest. Since the phase is corrected directly where it originates, all points in the FOV can be optimized simultaneously without requiring any trade-off. Such a DM configuration gives the ultimate performance for a given scenario (number, position and magnitude of the GSs).



**Figure 1.** The 17 normalized  $C_n^2$  profiles used in the simulations [in dotted line] and the average profile (in solid line). The error bars correspond to the standard deviation estimated on these 17 samples.

In a real system one would like however to use a number of DMs much smaller than the number of true layers. Trade-offs are then required since optimizing the correction in a given direction might deteriorate the correction in an other.  $\mathbf{P}_{[\{\alpha\}_{fov}, DM]}$  gives the best trade-offs for a given field of view of interest. Reducing the number of DMs leads to more severe trade-offs which might significantly lower down the achievable performance. The choice of the number of DMs in practical conditions will be discussed in Sect. 3.2 and 4.

Here we consider one wavefront sensor per GS but this reconstruction approach is more general and the formalism could be applied to other types of WFS data such as, for instance, layer oriented measurements [Diolaita-01].

### 3. PERFORMANCE LIMITATIONS

We study here the influence on the MCAO performance of different factors such as: the number of DMs, the turbulence distribution in altitude, and the lack of accurate knowledge on this distribution.

These effects are illustrated on a particular case using numerical simulations but a more general discussion is presented in Sect. 4.

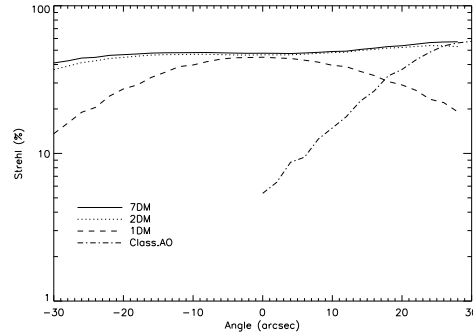
#### 3.1. System Configuration

The results presented here correspond to a 8 m telescope observing in the near infrared ( $2.2\mu\text{m}$ ).

In the numerical simulations, the atmosphere is modeled with 7 layers (with altitudes ranging from 0 to 18 km), and the turbulence profiles are all normalized to a constant  $r_o$  so that  $\frac{D}{r_o} = 9$  @  $2.2\mu\text{m}$ . We selected 17  $C_n^2$  profiles in a four hour series of scidar measurements obtained during the night between the 16 and 17 of May 2000 at San Pedro Martir (Mexico). They are plotted in Fig. 1 as well as the average profile. It must be noted that the original profiles contained 40 layers that were reduced to 7 layers in order to manipulate only relatively small matrices in the MCAO simulation. The strength affected to these layers is simply the integral over 7 slabs of identical thickness.

Three GSs of magnitude 12 were used for wavefront sensing. The WFSs are not really simulated but the level and modal dependence of the noise correspond to a Shack-Hartmann with an equivalent signal to noise ratio of 10. The GSs are placed on the vertices of an equilateral triangle inscribed in a 1 arcmin circle.

The MCAO simulations are performed in open loop using the optimal reconstruction with a 66 Zernike mode correction on two DMs. The two DM conjugation altitudes are fixed (1.4 and 12.1 km) and were determined by applying an equivalent-layer approach to the average profile [Fusco-a-99b].



**Figure 2.** Strehl ratio in the field of view along a bisector of the triangle formed by the three guide stars: MCAO with seven DMs [solid], with two DMs [dotted] and with one DM [dashed]. The Strehl ratio obtained with classical AO is shown for comparison [dash-dotted].

### 3.2. Choice of the Number of DMs

We want first of all to justify the choice of two DMs. We will therefore compare the performance of a one, two and seven DM MCAO system. For the seven DM system, the conjugated altitudes of the DMs correspond to our seven turbulent layers. As mentioned in Sect. 2 this gives the ultimate performance for a given GS configuration. In the mono-mirror case, the DM is conjugated to 4.2 km, altitude again determined with an equivalent layer approach.

The performance is obtained with the three GS configuration and with turbulence conditions corresponding to the average  $C_n^2$  profile. This profile is supposed to be known and is used for the reconstruction. The correction is optimized on the 1 arcmin disk delimited by the GSs. Figure 2 shows the Strehl Ratio [SR] obtained at  $2.2\mu m$  along a bisector of the triangle formed by the GSs. The performance of a classical AO system using the GS located on the bisector is shown for comparison.

The seven DM system gives quasi uniform and very high performance ( $SR > 40\%$ ). With the proper regularization included in the optimal reconstruction there is no link between the number of GSs and the number of controllable DMs: the ultimate performance is always achieved with as many DMs as turbulent layers, seven in this case. The question is whether the performance is significantly degraded when reducing the number of DMs. We see here that two DMs already give a quasi ultimate performance. With a single DM though the SR is severely degraded on the edge of the 1 arcmin FOV. The SR is optimized in average on this field which leads to difficult trade-offs with a single DM. In the classical AO case, the correction quality is good in the GS direction but degrades very quickly when moving away from the GS.

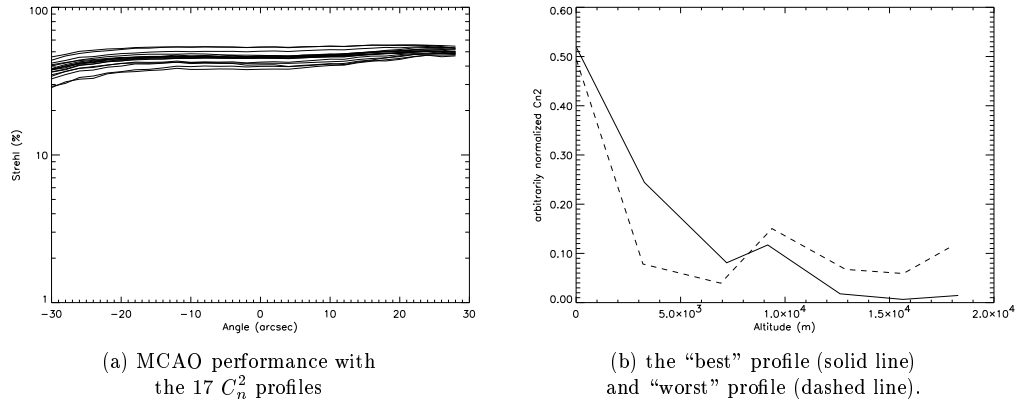
In our case two DMs seems therefore a good compromise between performance and system complexity. In the following simulations a two-DM MCAO system is used.

### 3.3. Influence of the Turbulence Profile

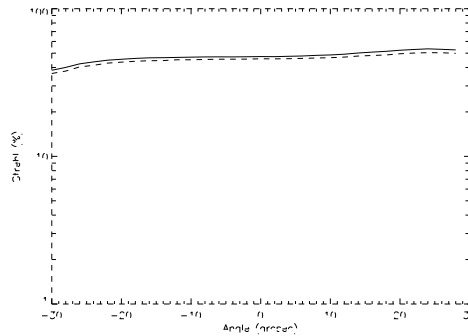
We want here to address the question of the sensitivity of MCAO performance to changes in the relative weight of the turbulent layers, assuming a constant seeing. We therefore determined the MCAO performance for each of the 17  $C_n^2$  profiles, assuming each time that the profile was perfectly known and using it for the reconstruction. The results, presented in Fig. 3, clearly show that the performance is rather sensitive to  $C_n^2$  profile evolution. This can be understood by looking at the “best” and “worst” profiles, that is giving the best and worst performance. The best profile is the one with less perturbation on the higher layers, while the worst one presents a significant portion of the energy between 10 and 18 km. The upper layers are indeed difficult to analyze, and consequently to correct, since beams coming from the different GSs are well separated: the separation between the pupil centers is approximately 5 m at 18 km.

In the previous simulations, the reconstructor was adapted to each specific turbulence condition and calculated using the associated turbulence profile. It is however interesting to know the precision required on the profile used to calculate the reconstructor. We therefore estimated the MCAO performance with the same 17





**Figure 3.** (a) Strehl Ratio in the field of view obtained with a two-deformable mirror MCAO correction optimized on a 1 arcmin field of view. (b) Turbulence profiles corresponding to the best performance (upper SR curve) and the worst performance (lower SR curve).



**Figure 4.** Strehl ratio in the field of view: optimal reconstruction with perfect knowledge of the turbulence profile (one among the 17 presented in Fig. 1) [solid], sub-optimal reconstruction using a mean turbulence profile [dashed].

profiles but using this time always the same reconstructor derived from the mean profile shown in Fig. 1 which is sub-optimal. We show in Fig. 4 the comparison between the optimal curve already presented in Fig. 3 and the sub-optimal one using the new reconstructor for one of the 17 profiles, but very similar results are obtained for the other profiles: the use of a mean profile in the reconstructor induces only a loss of a few percent in SR. The performance is not very sensitive to the  $C_n^2$  uncertainties and the reconstruction does not require a very accurate  $C_n^2$  model. Of course this is still part of the error budget and if the  $C_n^2$  model used is really not representative it eventually affects the performance. For instance, in the conditions considered here, a absolute loss of 10% in SR is observed when assuming a constant  $C_n^2$  between 0 and 18 km in the reconstruction.

#### 4. DISCUSSION

The results presented in Sect. 3 were obtained in a particular case in terms of telescope diameter, GS geometry, FOV of interest, WFS noise, number of correction modes, wavelength and turbulence conditions.

We will try to see how the results can be affected when changing these parameters. For instance the choice of the number of DMs will depend on the dominant error source in the system. In MCAO one can identify two specific error sources. The first one, called here DM sampling, is related to the ability to correct the turbulence volume with a finite number of DMs. The second one is related to the ability to sense the turbulence volume using the available GSs, and will be called GS sampling.

Even with a perfect knowledge of the phase in the volume, the use of a finite number of DMs limits the performance. One can still deduce an optimal DM correction from this phase in the volume for a specified FOV of interest. This corresponds to the projection described in Sect. 2, or to low-pass filtering described by other authors[Rigaut-p-00,Tokovinin-a-00,Diolaiti-a-01]. The filtering is all the more important that the layer is further away from the DM and that the FOV of interest is large. The DM sampling error is therefore more important with larger FOV of interest. It is also a function of the turbulence distribution in altitude. It is more critical when the turbulence is spread over a large range of altitudes. Of course the global error variance relevant when considering the imaging performance, is proportional to  $r_o^{-5/3}$ . The DM sampling is therefore more critical when going to smaller wavelengths. F. Rigaut[Rigaut-p-00] has however shown that, to the first order, this error is independent of the telescope diameter.

GS sampling is somewhat more complex since it actually conditions the ability to reconstruct the turbulence volume given the noisy WFS measurements. For sure the GS geometry is related to the sensitivity to the phase modes in the volume and to the existence of unseen modes[Fusco-p-00d]. It is more critical with using GSs with large separations and giving a poor sampling of the FOV of interest. This is particularly true when there is a significant amount of turbulence in high altitude layers as already illustrated in Sect. 3. Ones again going to shorter wavelength makes it more difficult. Preliminary studies[Ragazzoni-a-99b,Fusco-p-00a] seem to show that GS sampling is less critical on large telescopes.

The actual choice of the number of DMs of course depends of the dominant error term. In the case presented in Sect. 3, it is clear that the DM sampling is not the limiting effect even with only 2 DMs. With numerous bright stars in the field, DM sampling may become the limiting factor and the ultimate performance might require a larger number of DMs. It is the case of the Gemini-south which uses several bright laser GSs, hence the need of three rather than two DMs[Flicker-p-00]. In any case for 8m telescope near-infrared observations on a few arcmin FOV the number of DMs should remain reasonable[Fusco-a-99b]. The number of required DMs for extremely large telescopes is however still unclear.

In any case both the DM and GS sampling errors are sensitive to the turbulence profile and MCAO performance will therefore be affected by the actual profile during the observation as illustrated in Sect. 3. The presence of turbulence at high altitude is of course particularly limiting. Careful site testing with  $C_n^2$  profile measurements seems therefore important to estimate the performance of future MCAO systems. When operating telescopes equipped with such systems, profile measurements could be useful to select nights particularly adapted to MCAO large field of view observations. The optimization of the control should not however require a very accurate profile estimate. Note that using a poor estimate still contributes to the error budget and a higher precision will probably be needed on systems requiring a large number of DMs.

#### 5. CONCLUSION

An optimal phase reconstruction has been proposed for large FOV high resolution imaging with MCAO. This approach accounts for wavefront sensing noise but also makes use of a turbulence profile model. Typical near infrared performance on a 8 m telescope has been given. In such conditions MCAO requires only a few

DMs. The number of DMs would however increase when going to shorter wavelength and larger FOV. The performance have been shown to be sensitive to the turbulence distribution in altitude. On site turbulence profile measurements could therefore be useful to operate MCAO during nights particularly adapted to large field of view imaging. The reconstruction does not however require a very precise turbulence model especially when using a small number of DMs.

## ACKNOWLEDGMENTS

We would like to particularly thank Remy Avila for providing the turbulence data used in this paper. Thanks also to François Rigaut, Laurent Mugnier and Vincent Michau for the fruitful discussions we had with them.

Part of this research has benefited from the support of the European Commission RTN program: "Adaptive Optics for the Extremely Large Telescopes", contract #HPRN-CT-2000-00147.

## REFERENCES

- Avila et al., 1998 Avila-a-98 Avila, R., Vernin, J., and Cuevas, S. (1998). Turbulence profiles with generalized scidar at san pedro mártir observatory and isoplanatism studies. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 110:1106–1116.
- Avila R., 2001 Avila-a-01 Avila R., Vernin J., S. L. (2001). Atmospheric turbulence and wind profiles monitoring with generalized scidar. *Astron. Astrophys.*, 369:364–372.
- Beckers, 1988 Beckers-p-88 Beckers, J. M. (1988). Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics. In Ulrich, M.-H., editor, *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, volume 2 of *ESO Conference and Workshop Proceedings*, pages 693–703, Garching Germany. ESO, ESO.
- Dicke, 1975 Dicke-a-75 Dicke, R. H. (1975). Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction. *Astron. J.*, 198(4):605–615.
- Ellerbroek, 1994 Ellerbroek-a-94 Ellerbroek, B. L. (1994). First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2):783–805.
- Flicker et al., 2000 Flicker-p-00 Flicker, R., Rigaut, F., and Ellerbroek, B. (2000). Comparison of multiconjugate adaptive optics configurations and control algorithms for the gemini-south 8-m telescope. volume 4007, pages 1032–1043, Bellingham, Washington. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- Fuchs et al., 1998 Fuchs-a-98 Fuchs, A., Tallon, M., and Vernin, J. (1998). Focusing on a turbulent layer: Principle of the "generalized scidar". *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 110:86–91.
- Fusco et al., 1999 Fusco-a-99b Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Mugnier, L., and Rousset, G. (1999). Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics. *Opt. Lett.*, 24(21):1472–1474.
- Fusco et al., 2000a Fusco-p-00d Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Rousset, G., and Assémat, F. (2000a). Multi-conjugate adaptive optics: Comparison of phase reconstruction approaches for large field of view. In Wizinowich, P. L., editor, *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VI*, volume 4167, Bellingham, Washington. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- Fusco et al., 2000b Fusco-p-00a Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Rousset, G., and Mugnier, L. (2000b). Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics. In Wizinowich, P., editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007, pages 1044–1055, Bellingham, Washington. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- Fusco et al., 2001 Fusco-a-01 Fusco, T., Conan, J.-M., Rousset, G., Mugnier, L. M., and Michau, V. (2001). Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(9).
- Ragazzoni, 1999 Ragazzoni-a-99b Ragazzoni, R. (1999). No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 136:205–209.
- Ragazzoni et al., 1999 Ragazzoni-a-99a Ragazzoni, R., Marchetti, E., and Rigaut, F. (1999). Modal tomography for adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, 342:53–56.
- Tallon et al., 1992 Tallon-p-92 Tallon, M., Foy, R., and Vernin, J. (1992). 3-d wavefront sensing and multiconjugate adaptive optics. In Ulrich, M.-H., editor, *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, volume 42, pages 517–521, Munich, Germany. ESO.
- Tokovinin et al., 2000 Tokovinin-a-00 Tokovinin, A., Le Louarn, M., and Sarazin, M. (2000). Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(10):1819–1827.

# Bibliographie

- [AM79] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal filtering*. London : Prentice Hall, 1979.
- [AM90] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal control, linear quadratic methods*. London : Prentice Hall, 1990.
- [AV98] R. Avila and J. Vernin. Atmospheric turbulence and wind profiles monitoring with generalized scidar. *Astron. Astrophys.*, 369 :364–372, 1998.
- [AVC01] R. Avila, J. Vernin, and S. Cuevas. Turbulence profiles with generalized scidar at san pedro mártir observatory and isoplanatism studies. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 110 :364–372, 2001.
- [Avi98] R. Avila. *Caractérisation de la Turbulence Atmosphérique pour la Haute Résolution Angulaire en Astronomie : Mise en œuvre et Exploitation du Scidar Généralisé et du Grating Scale Monitor*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1998.
- [Bab53] H. W Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Astronomy and Astrophysics*, 65 :229, 1953.
- [BCLR<sup>+</sup>01] D. Bello, R. Conan, B. Le Roux, E. Marchetti, J.-M. Conan, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Le Louarn, E. Viard, and N. Hubin. Performance of a ngs-based mcao demonstrator : the ngc3366 and ngc2346 simulations. In S.Esposito R.Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 231–237, 2001.
- [Bec88] J.M. Beckers. Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics. In editor Ulrich, M.-H., editor, *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, volume 2, pages 693–703, 1988.
- [Bel03] D. Bello. Signal to noise ratio of layer oriented measurements for multiconjugate adaptive optics. *Astron. Astroph.*, 2003.
- [BGF<sup>+</sup>02] B. J. Bauman, D. T. Gavel, L. M. Flath, R. L. Hurd, C. E. Max, and S. S. Olivier. Proposed multiconjugate adaptive optics experiment at lick observatory. In Michael C. Roggemann Robert K. Tyson, Domenico Bonaccini, editor, *Adaptive Optical Systems and Technologies II*, volume 4494 of *Proceedings of SPIE*, pages 81–88, 2002.
- [BSHS02] C. Boyer, J. Sebag, M. Hunten, and L. Saddlemyer. Gemini mcao control system. In Michael C. Roggemann Robert K. Tyson, Domenico Bonaccini, editor, *Adaptive Optical Systems and Technologies II*, volume 4494 of *Proceedings of SPIE*, page 167, 2002.

- [Cha92] F. Chassat. *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative*. PhD thesis, Université Paris Sud, 1992.
- [CLRB<sup>+</sup>01] J.-M. Conan, B. Le Roux, D. Bello, T. Fusco, and G. Rousset. Multiconjugate adaptive optics : performance with optimal wavefront reconstruction. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 209–215, 2001.
- [Con94] J.-M. Conan. *Etude de la correction partielle en Optique Adaptative*. PhD thesis, Université Paris XI., 1994.
- [Cor51] S. Corrsin. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J.A.P.*, 22(4) :469–473, 1951.
- [CRM95] J.-M. Conan, G. Rousset, and P.-Y. Madec. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(12) :1559–1570, jul 1995.
- [DARF03] E. Diolaiti, C. Arcidiacono, R. Ragazzoni, and E. Fedrigo. Identification and rejection of waffle modes in layer-oriented adaptive optics. In Domenico Bonaccini Peter Wizinowich, editor, *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839 of *Proceedings of SPIE*, pages 1001–1010, 2003.
- [Des98] C. Dessenne. *Commande modale et prédictive en optique adaptative classique*. PhD thesis, Université Paris VII, 1998.
- [Dic75] R.H. Dicke. Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction. *Astron. J.*, pages 605–615, 1975.
- [DMR98] C. Dessenne, P.-Y. Madec, and G. Rousset. Optimization of a predictive controller for the closed loop adaptive optics. *Appl. Opt.*, 37 :4623, 1998.
- [DRT01] E. Diolaiti, R. Ragazzoni, and M. Tordi. Closed loop performance of a layer oriented multi-conjugate adaptive optics system. *Astron. Astrophys.*, 372 :710, 2001.
- [DTR<sup>+</sup>03] E. Diolaiti, A. Tozzi, R. Ragazzoni, D. Feruzzi, E. Vernet-Viard, S. Esposito, J. Fariato, A. Ghedina, and A. Riccardi. Some novel concepts in multipyramid wavefront sensing. In Domenico Bonaccini Peter Wizinowich, editor, *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839 of *Proceedings of SPIE*, 2003.
- [Ell94] B. L. Ellerbroek. First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2) :783–805, 1994.
- [Ell97] B. L. Ellerbroek. Optimizing the performance of closed-loop adaptive-optics control systems on the basis of experimentally performance data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(8) :1975–1987, 1997.
- [Ell01] T. A. Ellerbroek, B. L. and Rhoadarmer. Adaptive wavefront control algorithms for closed loop adaptive optics. *Mathematical and Computer modelling*, 33 :145–158, 2001.

- [FC03] T. Fusco and J.-M. Conan. On- and off- axis statistical behaviour of adaptive optics corrected short exposure images. *Astron. Astroph.*, submitted, 2003.
- [FCM<sup>+</sup>99] T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier, and G. Rousset. Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics. *Opt. Lett.*, 24(21) :1472–1474, 1999.
- [FCM<sup>+</sup>00a] T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, and F. Assémat. Multi-conjugate adaptive optics : Comparison of phase reconstruction approaches for large field of view. In editor In Wizinowich, P. L., editor, *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VI*, volume 4167 of *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 2000.
- [FCM<sup>+</sup>00b] T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, and L. Mugnier. Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics. In editor In Wizinowich, P., editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 of *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, pages 1044–1055, 2000.
- [FCMR02] T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, and G. Rousset. Noise propagation for multiconjugate adaptive optics systems. In A. Kohnle, J. D. Gonglewski, and T. J. Schmugge, editors, *Optics in atmospheric Propagation and Adaptive Systems IV*, volume 4538, pages 144–155, Bellingham, Washington, 2002. PSPIE, SPIE.
- [FCR<sup>+</sup>01] T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L.M. Mugnier, and V. Michau. Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18, 2001.
- [FCR02] B. Femenia, M. Carillet, and A. and Esposito Riccardi. Numerical simulations of mcao modal systems in open-loop and closed loop simulations. In Michael C. Roggemann Robert K. Tyson, Domenico Bonaccini, editor, *Adaptive Optical Systems and Technologies II*, volume 4494 of *Proceedings of SPIE*, pages 132–143, 2002.
- [FCRM00] T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, and V. Michau. Performance and limitation of phase estimating algorithms for multiconjugate adaptive optics. In ?, editor, ?, 2000.
- [Fli01] R. C. Flicker. Sequence of phase correction in multiconjugate adaptive optics. *Optics Letters*, 26(22) :1743–1745, 2001.
- [FRE00] R. Flicker, F. Rigaut, and B. Ellerbroek. Comparison of multiconjugate adaptive optics configurations and control algorithms for the gemini-south 8-m telescope. In Washington. Bellingham, editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 of *ESO Conference and Workshop Proceedings*, pages 1032–1043, 2000.
- [Fri66] D. L. Fried. Optical through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 56 :1372–1379, 1966.
- [Fri82] D. L. Fried. Anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 72(1) :52–61, 1982.
- [FTV98] A. Fuchs, M. Tallon, and J. Vernin. Focusing on a turbulent layer : Principle of the generalized scidar. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 110 :86–91, 1998.
- [Fus00] T. Fusco. *Correction partielle et anisoplanetisme en Optique Adaptative : traitements a posteriori et Optique Adaptative Multiconjuguée*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2000.

- [Fus03] T. Fusco. Calcul des erreurs temporelles en oa. *Rapport ONERA*, ?, 2003.
- [Gen95] E. Gendron. *Optimisation de la commande modale en optique adaptative : Application a l'astronomie*. PhD thesis, Université Paris VII, 1995.
- [GL94a] E. Gendron and P. Lena. Astronomical adaptive optics i. modal control optimization. *Astronomy and Astrophysics*, 291 :337–347, 1994.
- [GL94b] E. Gendron and P. Lena. Astronomical adaptive optics ii. experimental results of an optimize modal control. *Astronomy and Astrophysics*, 111 :153–167, 1994.
- [Hah63] W. Hahn. *Theory and application of Lyapunov's Direct Method*. London : Prentice Hall, 1963.
- [HLK77] J. W. Hardy, Lefevbre, and Koliopoulos. Real time atmospheric compensation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 67(3) :360–369, 1977.
- [HMF<sup>+</sup>01] N. Hubin, E. Marchetti, E. Fedrigo, R. Conan, R. Ragazzoni, E. Diolaiti, M. Tordi, G. Rousset, T. Fusco, P. Y. Madec, D. Butler, S. Hippler, and S. Esposito. The eso mcao demonstrator mad : a european collaboration. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 27–35, 2001.
- [Huf74] R. E. Hufnagel. Variation of atmospheric turbulence. In Boulder, editor, *Digest of technical papers*, Topical Meetic on Optical Propagation through Turbulence, 1974.
- [Idi01] J. Idier, editor. Lavoisier, Paris, 2001.
- [Jas70] A. H. Jaswinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 1970.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. of Basic Eng. Trans. ASME, Series D*, 82(1) :35–45, 1960.
- [KB60] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *J. of Basic Eng. Trans. ASME, Series D*, 83(3) :95–108, 1960.
- [Lab70] A. Labeyrie. Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by fourier analysing speckle patterns. *Astronomy and Astrophysics*, 6 :85–87, 1970.
- [LALH<sup>+</sup>01] M. Langlois, R. Angel, M. Lloyd-Hart, F. Wildi, G. D. Love, and A. Naumov. High order, reconstructor free adaptive optics for 6-8 meter class telescopes. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 113–120, 2001.
- [LCD<sup>+</sup>01] G. D. Love, P. Clarck, C. N. Dunlop, T. L. Kelly, M. Langlois, R. M. Myers, and R. M. Sharples. Emulating multiconjugate turbulence. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 313–319, 2001.
- [LL00] M. Le Louarn. *Étoiles laser pour les grands télescopes : effet de cône et implications astrophysiques*. PhD thesis, Université Lyon I - Claude Bernard, 2000.
- [LL01] M. Le Louarn. Multiconjugate adaptive optics : a psf study. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 217–222, 2001.

- [LRCC<sup>+</sup>03a] B. Le Roux, J.-M. Conan, Kulcsár C., H. F. Raynaud, L. M. Mugnier, and T. Fusco. Optimal control for classical and multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, submitted, 2003.
- [LRCC<sup>+</sup>03b] B. Le Roux, J.-M. Conan, Kulcsár C., H. F. Raynaud, L. M. Mugnier, and T. Fusco. Optimal control law for multiconjugate adaptive optics. In Domenico Bonaccini Peter Wizinowich, editor, *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839 of *Proceedings of SPIE*, 2003.
- [LRFC<sup>+</sup>02] B. Le Roux, J.-M. Conan, T. Fusco, D. Bello, V. Michau, and G. Rousset. Multi-conjugate adaptive optics, principle, limitations and perspectives. In F. Combes and D. Barret, editors, *Scientific Highlights 2002*, EDP Sciences, 2002. SF2A.
- [Mad99] P.-Y. Madec. Control techniques. In Roddier [Rod99], chapter 6, pages 131–154.
- [MFLBed] D. Mouillet, T. Fusco, A.-M. Lagrange, and J.-L. Beuzit. "Planet Finder" on the VLT : context, goals and critical specification for adaptive optics. In *European Astronomical Society – publication series*, to be published.
- [MG76] B. Mc Glamery. Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images. *Image processing*, 74 :225–233, 1976.
- [MLB<sup>+</sup>02] D. Mouillet, A.-M. Lagrange, J.-L. Beuzit, F. Ménard, C. Moutou, T. Fusco, L. Abé, T. Gillot, R. Soummer, and P. Riaud. VLT-"Planet Finder" : Specifications for a ground-based high contrast imager. In F. Combes and D. Barret, editors, *Scientific Highlights 2002*, EDP Sciences, 2002. SF2A.
- [MOB<sup>+</sup>02] B. A. Macintosh, S. Olivier, B. Bauman, J. Brase, E. Carr, C. Carrano, D. T. Gavel, C. E. Max, and J. Patience. Practical high-order adaptive optics systems for extrasolar planet searches. In Michael C. Roggemann Robert K. Tyson, Domenico Bonaccini, editor, *Adaptive Optical Systems and Technologies II*, volume 4494 of *Proceedings of SPIE*, page 50, 2002.
- [MRF92] V. Michau, G. Rousset, and J. C. Fontanella. Wavefront sensing from extended sources. pages 124–128, 1992.
- [Noe97] T. Noel. *Caractérisation spatiale et temporelle de la turbulence atmosphérique par analyse de front d'onde*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1997.
- [Nol76] R.J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 66(3) :207–211, 1976.
- [Obe02] S. Oberti. *Etude de l'effet d'anisoplanétisme sur une optique adaptative et correction par multiconjugaison*. PhD thesis, Ecole Supérieure de Physique d'Optique, 2002.
- [Obu49] A. M. Obukhov. Structure of the temperature field in a turbulent current. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geograf. Geofiz.*, 13(1) :58–69, 1949.
- [PA93] R.N. Paschall and D.J. Anderson. Linear quadratic gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Applied Optics*, 32(31) :6347–6358, 1993.
- [Pap91] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.



- [Rad84] J. C. Radix. *Filtrage et Lissage Statistiques Optimaux Linéaires*. ENSTA - CEPADUES éditions, 1984.
- [Rag95] R. Ragazzoni. Absolute tip tilt determination with lasers beacons. *Astronomy and Astrophysics*, 305, 1995.
- [Rag96] R. Ragazzoni. Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *J. Mod. Opt.*, 43 :289, 1996.
- [Rag00] R. Ragazzoni. Adaptive optics for giant telescopes : Ngs vs. lgs. 57 :175, 2000.
- [Rag01] R. Ragazzoni. Multiple field of view layer oriented. In S. Esposito R. Ragazzoni, editor, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, volume 58 of *ESO Conference and workshop proceedings*, pages 75–82, 2001.
- [Ray] H. F. Raynaud. *Une introduction au formalisme d'état en automatique et en filtrage linéaire*. L2TI - Université Paris Nord.
- [RCED00] F. Rigaut, M. Chun, B. Ellerbroek, and C. D'Orgeville. MCAO for Gemini South. In Peter L. Wizinowich, editor, *Conceptual Design Review Documents*, MCAO Conceptual Design Documentation, 2000.
- [RDF<sup>+</sup>02] R. Ragazzoni, E. Diolaiti, J. Farinato, E. Fedrigo, E. Marchetti, M. Tordi, and D. Kirkman. Sky coverage in layer oriented adaptive optics. volume 4494 of *Proc. SPIE*, pages 52–58, 2002.
- [RDV02] R. Ragazzoni, E. Diolaiti, and E. Vernet. A pyramid wavefront sensor with no dynamic modulation. *Optics Com.*, 208 :51–60, 2002.
- [REF00] F. Rigaut, B.L. Ellerbroek, and R. Flicker. Principles, limitations and performance of multi-conjugate adaptive optics. In editor Wizinowich, P. L., editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 of *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, pages 1022–1031, 2000.
- [REM95] R. Ragazzoni, S. Esposito, and E. Marchetti. Auxiliary telescopes for the absolute tip tilt determination of laser guide stars. *MNRAS*, 276, 1995.
- [RFK<sup>+</sup>90] G. Rousset, J. C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, F. Rigaut, P. Léna, P. Boyer, C. Jarougel, J. P. Gaffard, and F. Merkle. First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, 230 :29–32, 1990.
- [RFM00] R. Ragazzoni, J. Farinato, and E. Marchetti. Adaptive optics for 100-m-class telescopes : new challenge requires new solutions. volume 4007 of *SPIE*, page 1076, 2000.
- [RG92] E. Rigaut and E. Gendron. Laser guide star in adaptive optics : the tilt determination problem. *Astron. Astrophys.*, 261 :677–684, 1992.
- [RGL82] F. Roddier, J. M. Gilli, and G. Lund. On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry. *Journal of Optics*, 13(5) :263–271, 1982.
- [RMB<sup>+</sup>92] G. Rousset, P. Y. Madec, J. L. Beuzit, J. G. Cuby, P. Gigan, P. Léna, F. Rigaut, C. Boyer, J. P. Gaffard, J. C. Richard, M. Vittot, E. Gendron, N. Hubin, and F. Merkle. The Come-On-Plus project. In OSA, editor, *Adaptive Optics for large telescopes*, 1992.

- [RMR91] G. Rousset, P. Y. Madec, and D. Rabaud. Adaptive optics partial correction simulation for two telescope by interferometry ii. In *High resolution imaging*, volume 39, pages 1095–1104. ESO, 1991.
- [RMV00] R. Ragazzoni, E. Marchetti, and G. Valente. Adaptive-optics correction available for the whole sky. *Nature (London)*, 403 :54–56, 2000.
- [Rod81] F. Roddier. The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy. In W. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 19, pages 281–376, 1981.
- [Rod88] F. Roddier. Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Applied Optics*, 27 :1223, 1988.
- [Rod90] N. Roddier. Atmospheric wave front simulation using zernike plynomials. *Opt. Eng.*, 29(10) :1174–1180, 1990.
- [Rod99] F. Roddier, editor. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Rou99] G. Rousset. Wave-front sensors. In Roddier [Rod99], chapter 5, pages 91–130.
- [Rou00] Rousset, G. and Lacombe, F. and Puget, P. and Gendron, E. and Hubin, N. and Zins, G. and Stadler, E. and Charton, J. and Gigan, P. and Feautrier, P. Status of the VLT Nasmyth adaptive optics system (NAOS). In Peter L. Wizinowich, editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 of *Proc. SPIE*, pages 72–81, 2000.
- [Sec99] M. Sechaud. Wave-front compensation devices. In Roddier [Rod99], chapter 4, pages 57–90.
- [Tat61] V. Tatarsky, editor. Dover publications, New York, 1961.
- [Tay35] G. I. Taylor. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 151 :421, 1935.
- [Tay38] G. I. Taylor. The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 64 :476, 1938.
- [TF90] M. Tallon and R. Foy. Adaptive telescope with laser probe : isoplanetism and cone effect. *Astron. Astroph.*, 235 :549–557, 1990.
- [TFV92] M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin. 3-d wavefront sensing and multiconjugate adaptive optics. In M.-H. Ulrich, editor, *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, volume 42 of *ESO Conference and Workshop Proceedings*, pages 517–521, 1992.
- [TLLS00] A. Tokovinin, M. Le Louarn, and M. Sarazin. Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(10) :1819–1827, 2000.
- [TLLV<sup>+</sup>01] A. Tokovinin, M. Le Louarn, E. Viard, N. Hubin, and R. Conan. Optimized modal tomography in adaptive optics. *Astron. and Astroph.*, 378 :710–721, 2001.
- [Tyl94] G. A Tyler. Rapid evaluation of d0 : the effective diameter of a laser guide star adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(1) :325, 1994.
- [Via01] E. Viard. *Systèmes d’optique adaptative avec étoiles laser : du système classique aux méthodes multiconjuguées*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001.
- [VT68] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*. Wiley, New York, 1968.

- [VVRA<sup>+</sup>03] E. Vernet-Viard, R. Ragazzoni, C. Arcidiacono, A. Baruffolo, E. Diolaiti, J. Farinato, E. Fedrigo, E. Marchetti, R. Falomo, S. Esposito, M. Carbillet, and C. Vérinaud. Layer oriented wavefront sensor for mad : Status and progress. In Domenico Bonaccini Peter Wizinowich, editor, *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839 of *Proceedings of SPIE*, 2003.
- [Wal83] E. P. Wallner. Optimal wave-front correction using slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. A*, 73(12), 1983.